Analyse 15 – Différentiabilité d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$.

1. Généralités sur la différentiabilité

Définition. On dit que f est *différentiable en $a \in \mathcal{U}$* s'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Cette application est unique et on la note df_a.

Exemple. $x \mapsto \|x\|^2$

Remarque. La notion de différentiabilité en a est indépendante de la norme choisie.

Application. Théorème de Liapounov

Définition. Si f est différentiable en tout $a \in \mathcal{U}$, on dit que f est *différentiable sur $\mathcal{U}$* et on appelle *application différentielle* de f l'application

$$df : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p), a \mapsto df_a.$$

Proposition. *Une application différentiable en $a \in \mathcal{U}$ est continue en $a \in \mathcal{U}$.*

Proposition. (i) *La différentiation est un opérateur linéaire.*
(ii) *Si $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ et $g : \mathcal{V} \to \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^q$ sont telles que f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et g est différentiable en $f(a) \in \mathcal{V}$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et*

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

Exemple. L'application $\varphi : GL_k(\mathbb{R}) \to GL_k(\mathbb{R}), u \mapsto u^{-1}$ est différentiable sur $GL_k(\mathbb{R})$ et pour tout $h \in GL_k(\mathbb{R})$

$$d\varphi_u(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}.$$

Théorème de la moyenne. *Si f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et si $[a,b] \subset \mathcal{U}$ alors*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a,b]} \|df_x(b-a)\| \leq \|b-a\| \sup_{x \in [a,b]} \|df_x\|$$

Si $p = 1$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis.

Application. Si $\mathcal{U}$ est connexe et si $df \equiv 0$ sur $\mathcal{U}$ alors f est constante sur $\mathcal{U}$.

Application (lemme de Sard)**.** Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ est différentiable de différentielle continue alors l'image par f de l'ensemble des $x \in \mathcal{U}$ tels que $\mathrm{rg} df_x < p$ est de mesure nulle.

2. Différentielles partielles et différentielles d'ordre supérieur

On pose $d^1 f = df$ et, pour tout $k \geq 1$, $d^{k+1} f = d(d^k f)$.
Définition. L'application $d^k f$ s'appelle la *différentielle d'ordre k de f*.
Si $d^k f$ est continue sur $\mathcal{U}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \geq 1$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple. $(x,y) \mapsto xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ est $\mathcal{C}^1$ non $\mathcal{C}^2$

Exemple. Une application multilinéaire est $\mathcal{C}^\infty$.

Définition. Soit $a \in \mathcal{U}$ et $h \in \mathbb{R}^n$ non nul. On dit que f admet une *dérivée directionnelle en a suivant h* si la limite suivante existe

$$f'(a;h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(a+t.h) - f(a)\right).$$

En particulier, si h est le i-è vecteur e_i de la base canonique

$$\partial_i f(a) = f'(a; e_i)$$

est appelé la *i-è différentielle partielle de f en a.*

Proposition. *Si f est différentiable en a alors f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions et on a pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$*

$$df_a(h) = \partial_1 f(a).h_1 + \cdots + \partial_n f(a).h_n$$

Exemple (théorème de Rolle)**.** Si $\mathcal{U}$ est borné et si f est continue sur $\overline{\mathcal{U}}$, différentiable sur $\mathcal{U}$ et nulle sur $\overline{\mathcal{U}} \backslash \mathcal{U}$ alors il existe $a \in \mathcal{U}$ tel que $df_a = 0$.

Exemple (théorème de Motzkin)**.** Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$ alors $x \mapsto d(x, F)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus F$ si et seulement si F est convexe.

Définition. Si $f = (f^1, \ldots, f^p)$ est différentiable en a, on appelle *matrice jacobienne de f en a* la matrice $J_f(a)$ de df_a dans la base canonique *i.e.* $J_f(a) = \left(\partial_i f^j\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Remarque. Si $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ et $g : \mathcal{V} \to \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^q$ sont telles que f est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et g est différentiable en $f(a) \in \mathcal{V}$ alors $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)).J_f(a)$.

Proposition. *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si et seulement si ses différentielles partielles existent et sont continues.*

Théorème de Schwarz. *Si f est deux fois différentiable sur $\mathcal{U}$ alors pour tout $a \in \mathcal{U}$ et pour tous $h, k \in \mathbb{R}^n$, on a $\partial_i\left(\partial_j f\right)(a)(h,k) = \partial_j\left(\partial_i f\right)(a)(h,k)$.*

Remarque. L'ordre de différentiation pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ n'intervient donc pas et on note indifféremment $\partial^2_{i,j} f(a)$ ou $\partial^2_{j,i} f(a)$ l'application $\partial_i\left(\partial_j f\right)(a) = \partial_j\left(\partial_i f\right)(a)$.

Formule de Taylor avec reste intégral. *Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathcal{U}$ et si $[a, a+h] \subset \mathcal{U}$ alors*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f_a(h)^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1} f_{x+th}(h)^{n+1} dt$$

3. Difféomorphismes

On suppose dans cette section que $p = n$.
Définition. On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un *difféomorphisme* si f est différentiable , bijective et telle que f^{-1} est aussi différentiable.

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, on dit alors que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Proposition. *Soit $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ intégrable alors*

$$\int_{\mathcal{V}} f(x)dx = \int_{\mathcal{U}} f[\varphi(t)].|\det J_\varphi(t)|dt.$$

Exemple. Soit $\mathcal{U} =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ et $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$ alors

$$\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est un difféomorphisme.

Application. Calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$.

Théorème d'inversion locale. *Soit $a \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que* $\det J_f(a) \neq 0$ *alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de a et un voisinage $\mathcal{V}$ de $f(a)$ tels que $f : \mathcal{U}' \to \mathcal{V}$ soit un difféomorphisme.*

Théorème d'inversion globale. *Soit $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ de classe $\mathcal{C}^1$, injective et telle que* $\det J_f(a) \neq 0$ *pour tout $a \in \mathcal{U}$ alors f est un difféomorphisme.*

Application (théorème de Brouwer)**.** Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.

4. Cas particulier des fonctions à valeurs réelles

Définition. a est un *point critique* si $df_a = 0$

Proposition. *Si f admet un extremum en a alors a est un point critique.*

Contre-exemple. $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$, on considère la forme quadratique

$$Q_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{i,i} f(a)h_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \partial^2_{i,j} f(a)h_ih_j.$$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$ est un point critique, alors*

$$f(a + h) = f(a) + \frac{1}{2}Q_a(h) + o(\|h\|^2)$$

Proposition. *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$ est un point critique, alors*

- *(i) si Q_a est définie positive alors f admet un minimum local en a,*
- *(ii) si Q_a est définie négative alors f admet un maximum local en a,*
- *(iii) si Q_a est non dégénérée mais ni positive ni négative alors f admet un point-selle en a.*

Exemple. $x \mapsto \langle x, a\rangle e^{-\|x\|^2}$

Développements

Théorème de Liapounov.

Théorème de Motzkin.

Théorème d'inversion locale.

Théorème de Brouwer.

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 2*, Dunod, 1999.

[2] A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 1997.

[3] P. Donato, *Calcul différentiel pour la licence*, Dunod, 2000.

[4] S. Gonnord et N. Tosel, *Calcul différentiel*, Ellipses, 1998.

[5] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.