Analyse 20 – Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives de solutions.

Soit $\mathcal{U} = I \times \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On considère l'équation différentielle $(E) :\ X' = f(t, X)$.

1. Théorèmes généraux

Définition. Une solution de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable $x : I \to \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in \mathcal{U}$ et $x'(t) = f(t, x(t))$. On dit que x est une *solution maximale* s'il n'existe pas de solution sur un intervalle $J \supsetneq I$.

Exemple. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = e^{at}$ est une solution maximale de l'équation $X' = aX$.

On dit que f est *localement lipschitzienne en la seconde variable* si pour tout $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (t_0, x_0) et $C > 0$ tels que, pour tous $(t, x_1) \in \mathcal{V}$ et $(t, x_2) \in \mathcal{V}$, on a $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le C \|x_1 - x_2\|$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz. *Si f est localement lipschitzienne en la seconde variable alors pour tout $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, il existe une unique solution maximale x, définie sur un intervalle ouvert $]T_*, T^*[$ contenant t_0, telle que $x(t_0) = x_0$.*

Remarque. Les graphes de deux solutions distinctes ne se coupent pas.

Théorème de l'explosion. *Soit $x(t)$ une solution maximale définie sur un intervalle $]T_*, T^*[$ et supposons que $I =]a, b[$.*

(i) Si $T^* < b$ alors $\lim_{t \to T^*} \|x(t)\| = +\infty$.

(ii) Si $T_* > a$ alors $\lim_{t \to T_*} \|x(t)\| = +\infty$.

Proposition. *On suppose que $\mathcal{U}$ est un parallélépipède sur lequel f est k-lipschitzienne en la seconde variable. Soit $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le graphe est dans $\mathcal{U}$ vérifiant*

$$\|u_1'(t) - f(t, u_1(t))\| \le \varepsilon_1\ ,\ \|u_2'(t) - f(t, u_2(t))\| \le \varepsilon_2$$
$$\text{et } \|u_1(t_0) - u_2(t_0)\| \le \delta$$

alors

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le \delta e^{k|t - t_0|} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\left(e^{k|t - t_0|} - 1\right).$$

2. Étude qualitative en dimension 1

Dans cette section, on suppose que $n = 1$.

Définition. Les *isoclines* sont les courbes sur lesquelles le champ $f(t, X)$ a une direction donnée.

Définition. Une fonction dérivable α est une *barrière inférieure* sur I si $\alpha'(t) \le f(t, \alpha(t))$ pour tout $t \in I$.

On dit que la barrière est *forte* si l'inégalité est stricte ; on définit de façon analogue les barrières supérieures.

Proposition. *Supposons que α soit une barrière inférieure forte ou que f soit lipschitzienne dans une région du plan. Si x est une solution telle que $\alpha(t_0) \le x(t_0)$ pour un $t_0 \in I$ alors $\alpha(t) \le x(t)$ pour tout $t \ge t_0$ pour lequel x est définie.*

On dit alors que la barrière est *non poreuse*.

Exemple. L'isocline I_0 de $X' = X^2 - t$ est une barrière inférieure si $X < 0$ et supérieure si $X > 0$.

Définition. Si α et β sont respectivement un barrière inférieure et supérieure non poreuse et si $\alpha(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in I$ alors $\{(t, x)\ ;\ t \in I\ ,\ \alpha(t) \le x \le \beta(t)\}$ est appelé un *entonnoir* sur I.

Proposition. *Si α et β définissent un entonnoir et si x est une solution telle que $(t^*, u(t^*))$ est dans l'entonnoir pour un certain $t^* \in I$ alors $(t, u(t))$ est dans l'entonnoir pour tout $t \ge t^*$ dans I.*

Exemple. Les isoclines I_0 et I_{-1} de $X' = X^2 - t$ définissent un entonnoir si $X < 0$.

Définition. Si α et β sont respectivement un barrière inférieure et supérieure non poreuse et si $\alpha(t) > \beta(t)$ pour tout $t \in I$ alors $\{(t, x)\ ;\ t \in I\ ,\ \alpha(t) \ge x \ge \beta(t)\}$ est appelé un *anti-entonnoir* sur I.

Proposition. *Si α et β définissent un anti-entonnoir A alors il existe une solution x telle que $\alpha(t) \ge x(t) \ge \beta(t)$ pour tout t dans I. On note $I =]a, b[$, si on a de plus*

$$\lim_{t \to b} |\alpha(t) - \beta(t)| = 0$$

et si $\partial_2 f \ge 0$ dans A, alors la solution est unique.

Exemple. Les isoclines I_1 et I_0 de $X' = X^2 - t$ définissent un anti-entonnoir si $X > 0$.

On s'intéresse aussi aux éventuelles asymptotes verticales des solutions :

Exemple. Dans la région $X > 0$ et $X^2 - t > \frac{X^2}{2}$, les solutions de $X' = \frac{X^2}{2}$ forment des barrières inférieures pour $X' = X^2 - t$. La solution de $X' = \frac{X^2}{2}$ passant par $(0, 1)$ a pour équation $x(t) = \frac{2}{2 - t}$ donc la solution de $X' = X^2 - t$ passant par $(0, 1)$ a une asymptote verticale en $t = 2$.

3. Équations différentielles linéaires

3.1. Structure de l'ensemble des solutions.

3.2. Équation $Y' = A(t)Y$.

Proposition. *La solution $u(t)$ de $X' = AX$ avec $u(t_0) = x_0$ est $u(t) = e^{(t - t_0)A} x_0$.*

Exemple. Supposons que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admette deux valeurs propres réelles distinctes non nulles λ_1 et λ_2.

(i) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ alors les solutions tendent vers $(0, 0)$ pour $t \to -\infty$ et vers l'infini pour $t \to +\infty$: il s'agit d'un *noeud répulsif*.

(*ii*) Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ alors les deux demi-droites de direction v_1 orientées vers 0 sont des solutions, les deux demi-droites de direction v_2 orientées vers l'infini sont des solutions, les autres sont asymptotes aux deux premières pour $t \to -\infty$ et aux deux derniès pour $t \to +\infty$: il s'agit d'un *col*.

(*iii*) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ alors les solutions tendent vers $(0,0)$ pour $t \to +\infty$ et vers l'infini pour $t \to -\infty$: il s'agit d'un *noeud attractif*.

3.3. **EDO linéaire scalaire d'ordre n.**
$\longrightarrow$ Étude de $y'' + q(t)y = 0$

4. Systèmes différentiels non linéaires

4.1. **Généralités.**

Définition. L'équation $X' = f(t,X)$ est dite *autonome* si f ne dépend pas explicitement de t.

Le *portrait de phase* des solutions est l'ensemble des projections des solutions dans l'espace des x_i.

Exemple. Le portrait de phase du système $x' = y, y' = -x$ est constitué de cercles concentriques.

Remarque. Quitte à poser $Y = (t,X)$, on peut toujours ramener l'étude d'un système $X' = f(t,X)$ à celle du système autonome $Y' = (1, f(Y))$.

4.2. **Exemples remarquables.**

Exemple (système proie-prédateur)**.** Il s'agit du système $\begin{cases} x' = ax - cxy \\ y' = -by + dxy \end{cases}$ avec $a,b,c,d > 0$. Les solutions de ce système telles que $x(t_0) > 0$ et $y(t_0) > 0$ sont périodiques.

4.3. **Retour à un problème linéaire.**

Théorème de Liapounov. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$ et telle que* $\operatorname{Re} \lambda < 0$ *pour toute valeur propre λ de df_0. Alors pour x_0 voisin de 0, la solution $x(t)$ de $X' = f(X), X(0) = x_0$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers l'infini.*

Développements

Étude de $y'' + q(t)y = 0$.

Système proie-prédateur.

Théorème de Liapounov.

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 3*, Dunod, 1996.

[2] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.

[3] X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

[4] J. Hubbard et B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, 1999.

[5] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, tome 4*, Masson, 1993.

[6] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

[7] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.