Continuité et dérivabilité des fonctions d'une variable réelle.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Propriétés classiques.

Théorème 1.1 (Heine) — Toute fonction f à valeurs réelles continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

Théorème 1.2 (théorème des valeurs intermédiaires) — Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 1.3 (Rolle) — Si une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]\,a,b\,[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe c dans $]\,a,b\,[$ tel que $f'(c) = 0$. [2], Sect. 2.1

Théorème 1.4 (accroissements finis) — Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]\,a,b\,[$. Alors il existe $c \in]\,a,b\,[$ tel que

$$f'(c) \ = \ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2 Continuité et dérivabilité des fonctions limites.

Théorème 2.1 — Soit f_n, $n \geq 0$, une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f_n converge uniformément vers une certaine fonction f alors f est continue sur $\mathbb{R}$. [2], Sect. 4.3

Théorème 2.2 — Soit f_n, $n \geq 0$, une suite de fonctions de classe C^1 d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

1. il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $f_n(x_0)$ converge ;
2. la suite f_n' converge uniformément sur I vers une certaine fonction g.

Alors f_n converge uniformément sur I vers une fonction f de classe C^1 et dont la dérivée f' est égale à g. [2], Sect. 4.3

Théorème 2.3 — L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ nulle part dérivables est dense dans l'espace des fonctions continues. [2], annexe A

Exemple 2.4 — On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $f_n(x) = 10^{-n}\{\,10^n x\,\}$, où $\{x\}$ désigne la distance de x à l'entier le plus proche. Alors la fonction

$$f(x) \ = \ \sum_{n \geq 0} f_n(x)$$

est continue sur $\mathbb{R}$, nulle part dérivable. [4], Sect. 8.1

Théorème 2.5 — Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R} \times X$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable ;
2. pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
3. il existe une fonction $g \in L^1(X)$ telle que pour presque tout $x \in X$

$$|f(t,x)| \ \leq \ g(x) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

alors la fonction $t \mapsto \int f(t,x)\,d\mu(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. [4], Sect. 9.1

THÉORÈME 2.6 — Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et f une fonction réelles définie sur le produit $I \subset \mathbb{R}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(X)$;
2. pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I ;
3. pour tout compact $K \subset I$, il existe $g \in L^1(X)$ telle que pour presque tout $x \in X$

$$|\,\partial_t f(t,x)\,| \;\leq\; g(x) \qquad \forall\, t \in K$$

alors la fonction $t \mapsto \int f(t,x)\,d\mu(x)$ est dérivable sur I et

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f(t,x)\,d\mu(x) \;=\; \int \partial_t f(t,x)\,d\mu(x)$$

[4], Sect. 9.1

3 Continuité et compacité.

THÉORÈME 3.1 — Pour tout $a > 1$, notons f_a la fonction définie par

$$f_a(x) \;=\; \frac{1}{x-a} \qquad x \in [0,1]$$

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement supérieurs à 1 et de limite $+\infty$. Alors l'espace vectoriel $V = \mathrm{vect}(f_{a_n}\,,\, n \geq 0)$ est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$. [1], Sect. 2.1

THÉORÈME 3.2 (HEINE) — Si f est une application continue d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors f est uniformément continue sur $[a,b]$. [2], Sect. 1.3

THÉORÈME 3.3 (WEIERSTRASS) — L'espace des polynômes est dense dans l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. [2], Sect. 4.6

THÉORÈME 3.4 — Soit V un sous-espace fermé de $C([0,1],\mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Si toute application $f \in V$ est de classe C^1 alors V est de dimension finie.
2. Si pour tout $f \in V$ il existe des constantes α, $C > 0$ telles que pour tous x, $y \in [0,1]$,

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; C|x-y|^\alpha$$

   alors V est de dimension finie. [1], Sect. 2.4

Références

[1] Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[3] Alain Pommellet. *Agrégation de mathématiques. Cours d'analyse.* Ellipses, 1994.

[4] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.