Espaces de Lebesgue $L^p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1 Présentation des espaces L^p

1.1 Définitions

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les fonctions f seront considérées de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1 On appelle $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p_M(\Omega, \mathbb{C})$ pour $1 \leqslant p < \infty$ l'espace des fonctions f mesurables, de $\Omega \to \mathbb{C}$ telles que $M(|f|^p) < \infty$ où M est une mesure sur Ω.

Définition 1.2 Pour $1 \leqslant p < \infty$, on appelle *norme* L^p et on note $\|.\|_p$, l'application définie par $\|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p)^{1/p}$.

Définition 1.3 On appelle *supessentiel* et on note $\|F\|_{L^\infty} = \inf\{C \geqslant 0 \text{ tel que } |f(x)| \leqslant C \text{ pp sur } \Omega\}$.

Définition 1.4 On appelle espace $\mathscr{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions qui ont un supessentiel fini.

Définition 1.5 On appelle *espace de Lebesgue* $L^p = L^p_\mu(\Omega, \mathbb{C})$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ $L^p = \mathscr{L}^p/\mathscr{R}$ où $\mathscr{R}$ est la relation d'équivalence définie par $f\mathscr{R}f' \Leftrightarrow \|f - f'\|_p = 0$ et μ est la mesure de Lebesgue.

Définition 1.6 On dit que p et p' sont deux exposants *conjugués* pour tout $p, p' \in [1; \infty]$ ssi $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On notera dans toute la suite p' le conjugué de p.

1.2 Théorème de Fischer-Riesz

Théorème 1.1 (Inégalité de Hölder) Soit $f \in L$ et $g \in L^{p'}$ où $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors $f.g \in L^1$ et $\int |fg| \leqslant \|f\|_p \ \|g\|_{p'}$

Corollaire 1.1 (Inégalité de Minkowski) $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

Théorème 1.2 L^p est un espace vectoriel et $\forall p \in [1; \infty]$, $\|.\|_p$ est une norme.

Théorème 1.3 (de convergence dominée de Lebesgue pour les espaces L^p) On suppose $p \neq \infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurable telle que $f_n(x) \to f(x) p.p.$. Si $\exists g \in L^p \ / \ \forall (x, n) \ |f_n(x)| \leqslant g(x)$ Alors $f \in L^p$ et $f_n \to f$ en norme L^p.

Exemple 1.1 Pour $p = \infty$, la suite de fonctions $f_n = \chi_{[n;\infty[}$ montre que le théorème précédent ne fonctionne pas pour L^∞.

Théorème 1.4 (de Fischer-Riesz) $\forall p \in [1; \infty], L^p$ est un espace de Banach.

1.3 Propriétés des espaces L^p

1.3.1 densité

Théorème 1.5 les fonctions en escaliers forment un sous-espace vectoriel dense de L^p pour $p \in [1; \infty[$

Théorème 1.6 (de densité) L'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.

Théorème 1.7 L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions infiniment dérivables à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < \infty$.

Proposition 1.1 L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans le sous espace de L^∞ des fonctions bornées qui tendent vers 0 à l'infini.

Application 1.1 (Inégalité de Hardy) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$. On définit $Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \ \forall x \in \mathbb{R}^+$. Si $1 < p < \infty$, on a $\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}$ et $Tf \in L^p$.

1.3.2 séparabilité

Définition 1.7 Un espace est *séparable* ssi il contient une partie dénombrable dense..

Théorème 1.8 (Espaces séparables) $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.

Proposition 1.2 $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

2 Dual

2.1 Identification du dual

Théorème 2.1 (de représentation de Riesz) Soit $1 \leqslant p < \infty$ et soit $\phi \in (L^p)'$. Alors $\exists! u \in L^{p'}$ tel que $< \phi, f >= \int uf \forall f \in L^p$. De plus on a $\|u\|_{L^{p'}} = \|\phi\|_{(L^p)'}$. Ce théorème permet d'identifier le dual de L^p à $L^{p'}$

Théorème 2.2 Le dual de L^∞ contient strictement L^1 et s'identifie à l'espace des mesures de Radon.

Exemple 2.1 (d'élément de L^∞ qui n'est pas dans L^1) Supposons que $0 \in \Omega$. Soit $\phi_0 : C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_0(f) = f(0)$. Soit ϕ la fonction qui prolonge cette fonction en une forme linéaire et continue sur L^∞. Alors, il n'existe pas de fonction $u \in L^1$ telle que $< \phi, f >= \int uf \quad \forall f \in L^\infty$.

2.2 réfléxivité

Définition 2.1 Soit $J : E \to E''$ tel que $J(x) = f \mapsto < f, x >$ Un espace E est dit *reflexif* si J est bijective de E dans E''.

Théorème 2.3 L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Proposition 2.1 L^1 et L^∞ ne sont pas réfléxifs.

Exemple 2.2 (de la non réfléxivité de L^1) Considérons $0 \in \Omega$ et la suite $f_n = \alpha_n (1)_{B(0,\frac{1}{n})}$ avec n assez grand pour que $B(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$ et α_n tel que $\|f\|_{L^1} = 1$. Si L^1 était réflexif, on pourrait avoir à la fois f (limite faible d'une sous suite de f_n) égale à 0 presque partout et $\int f = 1$, ce qui serait absurde.

3 Liens entre différentes convergences

3.1 Réciproque du théorème de Lebesgue

Théorème 3.1 (Réciproque du théorème de Lebesgue) Soit (f_n) une suite de L^p et $f \in L^p$ tels que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Alors il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) telle que :

1. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω
2. $\forall k \in \mathbb{N}\ |f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$ p.p. sur Ω, avec $h \in L^p$

Exemple 3.1 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$ dans L^p et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to g$ dans L^1. Alors il existe ϕ et ψ deux extractions telles que $f_{\phi(n)} \to f\ p.p.$ et $f_{\phi\circ\psi(n)} \to g\ p.p.$ et donc $f = g\ p.p.$

3.2 Convergence forte et faible

Remarque 3.1 On peut souvent utiliser une convergence faible pour démontrer une convergence forte.

Exemple 3.2 Soit $p > 1$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans L^p qui converge faiblement vers $f \in L^p$ et telle que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Alors f_n converge fortement vers f pour la norme L^p.

3.3 Aspect probabiliste

Définition 3.1 On parle de *convergence* L^p pour une suite de variables aléatoires X_n lorsque $E[|X_n - X|^p] \to 0)$.

Proposition 3.1 Pour $1 \leqslant p \leqslant q$, avec une mesure de probabilité, la convergence L^q entrainne la convergence L^p.

Théorème 3.2 La convergence L^p entrainne la convergence en probabilité $(P(\{\,\omega\,|\ \|X_n(\omega) - X(\omega)\| > \varepsilon\}) \to 0)$.

Théorème 3.3 (de Scheffé) Soit (X_n) une suite de v.a.r. positives intrégrables et X intégrable. Si $X_n \to Xp.s.$ et si $E[X_n] \to E[X]$ Alors X_n tend vers X en convergence L^1.

4 Le cas de L^2

Remarque 4.1 2 est conjugué à lui-même.

Proposition 4.1 Le produit de deux fonctions de L^2 est intégrable.

Définition 4.1 On peut définir un *produit scalaire euclidien* sur L^2 par $(f,g) \mapsto < f|g > = \int f.g\ dx$. On peut définir un *produit scalaire hermitien* sur $L^2(\mathbb{C})$ par $(f,g) \mapsto < f|g > = \int \overline{f}.g\ dx$.

Théorème 4.1 Muni de son produit scalaire, L^2 est un espace de Hilbert.

Remarque 4.2 Les propriétés de cet espace ont énormément d'application aux séries de Fourier.

Exemple 4.1 (Théorème de Plancherel) A chaque fonction f de L^2, on peut associer une fonction $\widehat{f}$ de L^2 de sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites :

1. Lorsque $f \in L^1 \cap L^2$, $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f.
2. $\forall f \in L^2$, on a $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

3. L'application $f \to \widehat{f}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de L^2 sur L^2.
4. Entre f et $\widehat{f}$ existent les relations symétriques suivantes : en posant $\phi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ixt}dx$ et $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(x)e^{ixt}dt$ on a $\lim_{A\to\infty} \|\phi_A - f\|_2 = 0$ et $\lim_{A\to\infty} \|\psi_A - \widehat{f}\|_2 = 0$

Remarques

Attention, j'ai choisi de ne pas ou peu parler des :
- produit de convolution
- suite régularisante
- critère de compacité forte (variante d'Ascoli pour les espaces L^p)

Bibliographie

[1] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle.* Masson, 1983.

[2] A. Chambert-Loir et S. Fermigier. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation*, volume Analyse 3. Masson, 1995.

[3] Fritz Reinhardt et Heinrich Soeder. *Atlas des Mathématiques.* Le livre de Poche, 1997.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1975.