Interversion d'une limite et d'une intégrale.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Théorèmes d'interversion classiques.

Théorème 1.1 (Beppo-Lévi) — Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite monotone de fonctions intégrables convergeant μ-presque partout vers une fonction $f \in L^1(\Omega)$. Alors, $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$. [3], Sect. 1.6

Théorème 1.2 — Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Alors

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n \, d\mu$$

[3], Sect. 1.6

Théorème 1.3 (lemme de Fatou) — Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Alors pour toute suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions mesurables positives

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n \ d\mu \ \leq \ \varliminf_{n\to\infty} \int f_n \ d\mu$$

[3], Sect. 1.6

Théorème 1.4 (Lebesgue) — Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, convergeant μ-presque partout vers une fonction mesurable f. Si la condition de domination

$$\exists \ g \in L^p(\Omega) \qquad \text{tel que} \qquad \forall \ n \geq 0 \qquad |f_n| \leq g \quad \mu - \text{pp}$$

est vérifiée alors $f \in L^p(\Omega)$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$. [3], Sect. 1.7

Proposition 1.5 (nombre de montées) — Soit X une surmartingale définie à l'infini. Alors pour tous $a < b$

$$\mathbf{E}\,(M_a^b) \ \leq \ \frac{1}{b-a} \, \mathbf{E}\,[(X_\infty - a)^-]$$

où M_a^b désigne le nombre de montées de la surmartingale de a vers b.

Théorème 1.6 (Convergence des martingales) — Soit X une martingale. Si X est bornée dans L^1, i.e. $\sup_{n\geq 0} \mathbf{E}\,|X_n| < \infty$ alors X_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable.

Théorème 1.7 (Fubini) — Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ deux espaces mesurés. Alors pour toute fonction $F \in L^1(X \times Y)$

$$\int_X d\mu(x) \int_Y F(x,y)\, d\nu(y) \ = \ \int_Y d\nu(y) \int_X F(x,y)\, d\mu(x) \ = \ \int\int_{X\times Y} F(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

[2], Sect. 4.1

Application 1.8 — Soit X_n une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de transition p symétrique, à portée finie et irréductible, i.e. l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{Z}^d$ tels que $p(x) \neq 0$ est une partie génératrice de $(\mathbb{Z}^d, +)$. Alors, X_n est récurrente si $d \leq 2$ et transiente sinon. [1], Sect. 4.10

[1] Tout usage commercial, en partie ou en totalité, de ce document est soumis à l'autorisation explicite de l'auteur.

2 Fonctions définies par une intégrale.

THÉORÈME 2.1 — Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, E un espace métrique et f une fonction complexe définie sur $E \times X$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $t \in E$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable ;
2. pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E ;
3. il existe une fonction $g \in L^1(X)$ telle que pour presque tout $x \in X$

$$|f(t,x)| \;\leq\; g(x) \qquad \forall\, t \in E$$

alors la fonction $t \;\mapsto\; \displaystyle\int f(t,x)\, d\mu(x)$ est continue sur E. [4], Sect. 9.1

THÉORÈME 2.2 — On suppose que E est un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(X)$;
2. pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I ;
3. pour tout compact $K \subset I$, il existe $g \in L^1(X)$ telle que pour presque tout $x \in X$

$$|\,\partial_t f(t,x)\,| \;\leq\; g(x) \qquad \forall\, t \in K$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(t,x)\, d\mu(x) \;=\; \int \partial_t f(t,x)\, d\mu(x)$$

[4], Sect. 9.1

APPLICATION 2.3 — Pour tous a, $b > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \;=\; \log(b) \;-\; \log(a)$$

[4], Sect. 9.7

THÉORÈME 2.4 — On suppose que E est un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $z \in \Omega$, la fonction $x \mapsto f(z,x)$ est dans $L^1(X)$;
2. pour presque tout $x \in X$, la fonction $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe dans Ω ;
3. pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $g \in L^1(X)$ telle que pour presque tout $x \in X$ et pour tout $z \in K$, $|f(z,x)| \leq g(x)$.

Alors

$$F(z) \;=\; \int f(z,x)\, d\mu(x)$$

est holomorphe dans Ω et

$$F'(z) \;=\; \int \partial_z f(z,x)\, d\mu(x)$$

[4], Sect. 9.1

APPLICATION 2.5 (PROLONGEMENT DE LA FONCTION Γ) — La fonction Γ définie par

$$\Gamma(t) \;=\; \int_0^{+\infty} x^{t-1}\, e^{-x}\, dx \qquad \forall\, t > 0$$

admet un prolongement analytique dans l'ouvert $\Omega = \{\, z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) > 0\,\}$. [4], Sect. 9.2

3 Intégrabilité uniforme.

Dans toute cette partie, $(X_i)_{i\in I}$ désigne une famille quelconque de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Proposition 3.1 — Une variable aléatoire X est intégrable si et seulement si

$$\int_{|X|\geq c} |X| \, \mathrm{d}\mathbf{P} \xrightarrow[c\to\infty]{} 0$$

Définition 3.2 — La famille $(X_i)_{i\in I}$ est dite uniformément intégrable si

$$\sup_{i\in I} \int_{|X_i|\geq c} |X_i| \, \mathrm{d}\mathbf{P} \xrightarrow[c\to\infty]{} 0$$

[1], Sect. 3.9

Définition 3.3 — La famille $(X_i)_{i\in I}$ est dite équi-intégrable si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, A \in \mathcal{F} \qquad \mathbf{P}(A) \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{i\in I} \int_A |X_i| \, \mathrm{d}\mathbf{P} \ \leq\ \varepsilon$$

[1], Sect. 3.9

Théorème 3.4 — Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. la famille $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable ;
2. la famille $(X_i)_{i\in I}$ est équi-intégrable et bornée dans $L^1(\Omega)$. [1], Sect. 3.9

Définition 3.5 — Une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable aléatoire X si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon \right) \ =\ 0$$

ce que l'on note $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

Théorème 3.6 (Lebesgue) — Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $X_n \xrightarrow{L^1} X$;
2. $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ est uniformément intégrable.

Références

[1] Paulo Baldi, Laurent Mazliak, Pierre Priouret. *Martingales et chaînes de Markov.* Hermann, 1998.

[2] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Dunod, 1999.

[3] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.

[4] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.