Exemples de calculs d'intégrales.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Techniques usuelles de calcul.

Théorème 1.1 (intégration par parties) — Soient $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de classe C^1. Alors

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx \;=\; \Big[u \cdot v \Big]_a^b \;-\; \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx$$

[3], Sect. 3.1

Application 1.2 (Intégrales de Wallis) — Lorsque $n \to \infty$

$$I_n \;=\; \int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx \;\sim\; \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

[3], Sect. 3.1

Théorème 1.3 (changement de variables) — Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, E un espace de Banach, $\varphi : [a,b] \longrightarrow I$ une application de classe C^1 et $f : I \longrightarrow E$ une fonction continue. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\, du$$

[3], Sect. 3.1

Application 1.4 — Primitives des fractions rationnelles

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} \qquad \int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}\, dx \qquad n \in \mathbb{N}^* \quad c^2 - 4d < 0$$

[3], Sect. 3.2

Application 1.5 (règle de Bioche) — Primitives des fractions rationnelles $F(x) = R(\sin x, \cos x)$ en sinus et cosinus

1. si $F(x) = F(\pi - x)$ on effectue le changement de variable $t = \sin x$
2. si $F(x) = F(-x)$ on effectue le changement de variable $t = \cos t$
3. si $F(x) = F(\pi + x)$ on effectue le changement de variable $t = \tan x$ [3], Sect. 3.2

2 Théorèmes d'inversion de limites.

Théorème 2.1 (Beppo-Lévi) — Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite monotone de fonctions intégrables convergeant μ-presque partout vers une fonction $f \in L^1(\Omega)$. Alors, $f_n \longrightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$. [4], Sect. 1.6

Théorème 2.2 (Lebesgue) — Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, convergeant μ-presque partout vers une fonction mesurable f. Si la condition de domination

$$\exists\; g \in L^p(\Omega) \qquad \text{tel que} \qquad \forall\; n \geq 0 \qquad |f_n| \leq g \quad \mu - \text{pp}$$

est vérifiée alors $f \in L^p(\Omega)$ et $f_n \xrightarrow{\;L^p\;} f$. [4], Sect. 1.7

Théorème 2.3 — Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, E un espace métrique et f une fonction complexe définie sur $E \times X$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $t \in E$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable ;
2. pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue sur E ;
3. il existe une fonction $g \in L^1(X)$ telle que pour presque tout $x \in X$

$$|f(t,x)| \ \leq \ g(x) \qquad \forall\, t \in E$$

alors la fonction $t \ \mapsto \displaystyle\int f(t,x)\, d\mu(x)$ est continue sur E. [5], Sect. 9.1

Théorème 2.4 — On suppose que E est un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est dans $L^1(X)$;
2. pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I ;
3. pour tout compact $K \subset I$, il existe $g \in L^1(X)$ telle que pour presque tout $x \in X$

$$|\, \partial f_t(t,x)\,| \ \leq \ g(x) \qquad \forall\, t \in K$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(t,x)\, d\mu(x) \ = \ \int \partial_t f(t,x)\, d\mu(x)$$

[5], Sect. 9.1

Application 2.5 — Pour tous a, $b > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \ = \ \log(b) \ - \ \log(a)$$

[5], Sect. 9.7

Proposition 2.6 — Pour tout $t \geq 0$

$$F(t) \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, e^{-tx}\, dx \ = \ \frac{\pi}{2} \ - \ \arctan t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx \ = \ \frac{\pi}{2}$$

[5], Sect. 9.2

3 Méthode des résidus.

Théorème 3.1 (théorème des résidus) — Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, f une fonction méromorphe sur Ω et $A \subset \Omega$ l'ensemble des pôles de f dans Ω. Alors pour tout chemin fermé γ dans $\Omega \setminus A$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz \ = \ \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f, a)\ \operatorname{Ind}_\gamma(a)$$

[4], Sect. 10.5

Application 3.2 — Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $0 < \alpha < 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} \ = \ \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \qquad\qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha - 1}}{1 + x}\, dx \ = \ \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

[1], Sect. 4.6

Application 3.3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{1 + x + x^2}\, dx \ = \ \frac{16\pi^2}{81\sqrt{3}}$ [1], Sect. 4.6

4 Intégrales multiples.

Théorème 4.1 (Fubini) — Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ deux espaces mesurés. Alors pour toute fonction $F \in L^1(X \times Y)$

$$\int_X d\mu(x) \int_Y F(x,y)\, d\nu(y) \;=\; \int_Y d\nu(y) \int_X F(x,y)\, d\mu(x) \;=\; \int\!\!\int_{X\times Y} F(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

[2], Sect. 4.1

Théorème 4.2 (changement de variables) — Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, φ un C^1-difféomorphisme de U sur V et $\mathcal{J}(\varphi)$ le jacobien de φ. Si $\mathcal{J}(\varphi)$ est borné sur U alors pour toute fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ continue bornée

$$\int_V f(v)\, dv \;=\; \int_U f(\varphi(u))\, |\mathcal{J}(\varphi)(u)|\, du$$

[3], Sect. 5.4

Application 4.3 (intégrale de Gauss)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \;=\; \sqrt{\pi}$$

[3], Sect. 5.4

Théorème 4.4 (Green-Riemann) — Soient $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord et $\omega = P\,dx + Q\,dy$ une forme différentielle de degré 1, de classe C^1 sur un ouvert contenant K. Alors

$$\int_{\partial K} (P\,dx + Q\,dy) \;=\; \int\!\!\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx\ dy$$

où ∂K désigne la frontière de K. [3], Sect. 5.4

Application 4.5 — La surface du compact K délimité par la boucle droite de la lemniscate de Bernoulli d'équation polaire $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$, $a > 0$, est donnée par

$$S \;=\; \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta\ d\theta \;=\; \frac{a^2}{2}$$

[3], Sect. 5.4

Références

[1] Nino Boccara. *Fonctions analytiques.* Ellipses, 1996.

[2] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Dunod, 1999.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.

[5] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.