Fonctions définies par une intégrale.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Régularité des fonctions définies par une intégrale.

Théorème 1.1 — Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, E un espace métrique et f une fonction complexe définie sur $E \times X$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $t \in E$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable ;
2. pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E ;
3. il existe une fonction $g \in L^1(X)$ telle que pour presque tout $x \in X$

$$|f(t,x)| \leq g(x) \qquad \forall\, t \in E$$

alors la fonction $t \mapsto \displaystyle\int f(t,x)\, d\mu(x)$ est continue sur E. [5], Sect. 9.1

Théorème 1.2 — On suppose que E est un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(X)$;
2. pour presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I ;
3. pour tout compact $K \subset I$, il existe $g \in L^1(X)$ telle que pour presque tout $x \in X$

$$|\,\partial_t f(t,x)\,| \leq g(x) \qquad \forall\, t \in K$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(t,x)\, d\mu(x) = \int \partial_t f(t,x)\, d\mu(x)$$

[5], Sect. 9.1

Application 1.3 — Pour tous a, $b > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \log(b) - \log(a)$$

[5], Sect. 9.7

Théorème 1.4 — On suppose que E est un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $z \in \Omega$, la fonction $x \mapsto f(z,x)$ est dans $L^1(X)$;
2. pour presque tout $x \in X$, la fonction $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe dans Ω ;
3. pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $g \in L^1(X)$ telle que pour presque tout $x \in X$ et pour tout $z \in K$, $|f(z,x)| \leq g(x)$.

Alors

$$F(z) = \int f(z,x)\, d\mu(x)$$

est holomorphe dans Ω et

$$F'(z) = \int \partial_z f(z,x)\, d\mu(x)$$

[5], Sect. 9.1

Application 1.5 (prolongement de la fonction Γ) — La fonction Γ définie par

$$\Gamma(t) \;=\; \int_0^{+\infty} x^{t-1}\, e^{-x}\, dx \qquad \forall\, t > 0$$

admet un prolongement analytique dans l'ouvert $\Omega = \{\, z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{Re}(z) > 0\,\}$. [5], Sect. 9.2

2 Produit de convolution. Applications.

Théorème 2.1 — Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. De plus, le produit de convolution de f et g défini par

$$(f * g)(x) \;=\; \int f(x-y)\, g(y)\, dy \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

est une fonction de $L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|\, f * g\,\|_{L^p} \;=\; \|\, f\,\|_{L^1}\ \|\, g\,\|_{L^p}$$

[2], Sect. 4.4

Proposition 2.2 — Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ et si $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ alors

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \qquad \text{et} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n \quad |\alpha| \leq k \qquad D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$$

[2], Sect. 4.4

Définition 2.3 (suites régularisantes) — On appelle suite régularisante toute suite de fonctions $(\rho_n)_{n \geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \operatorname{supp} \rho_n \subset B(0, 1/n) \qquad \int \rho_n \;=\; 1$$

[2], Sect. 4.4

Théorème 2.4 — Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, $\rho_n * f \;\xrightarrow{L^p}\; f$. [2], Sect. 4.4

Corollaire 2.5 — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Alors l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$. [2], Sect. 4.4

Théorème 2.6 (Weierstrass) — L'espace des polynômes est dense dans l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. [3], Sect. 4.6

Théorème 2.7 (Riesz-Frechet-Kolmogorov) — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega \subset\subset \Omega$ une partie compacte de Ω et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|\, \tau_h f - f\,\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon \qquad \forall\ |h| < \eta \qquad \forall\ f \in \mathcal{F}$$

alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$. [2], Sect. 4.5

3 Propriétés de la transformée de Fourier.

Définition 3.1 — Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on définit la transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\, f(x)\, dx \qquad t \in \mathbb{R}$$

[4], Sect. 9.1

Théorème 3.2 (Riemann-Lebesgue) — Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. [5], Sect. 9.4

Théorème 3.3 (théorème d'inversion) — Si f, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et si

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \hat{f}(t) \, dt$$

alors $f = g$ presque partout. [4], Sect. 9.2

Corollaire 3.4 — Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\hat{f}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors la fonction f est nulle presque partout. [4], Sect. 9.2

Théorème 3.5 (Plancherel) — A toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ on peut associer une fonction $\hat{f}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés suivantes

1. si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}$ coïncide avec la transformée de Fourier de f ;
2. pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\| \hat{f} \|_2 = \| f \|_2$;
3. l'application $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

[4], Sect. 9.3

Application 3.6 — Soit X_n une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de transition p symétrique, à portée finie et irréductible, i.e. l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{Z}^d$ tels que $p(x) \neq 0$ est une partie génératrice de $(\mathbb{Z}^d, +)$. Alors, X_n est récurrente si $d \leq 2$ et transiente sinon. [1], Sect. 4.10

Définition 3.7 — Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction caractéristique de X la fonction notée ϕ_X définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\phi_X(t) = \mathbf{E}\,(e^{itX})$.

Théorème 3.8 — La fonction ϕ_X caractérise la loi de X, i.e. si $\phi_X = \phi_Y$ alors les variables aléatoires X et Y ont même loi. De plus, pour toute suite $(X_n)_{n \geq 0}$ les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $X_n \xrightarrow{loi} X$;
2. $\phi_{X_n}(t) \longrightarrow \phi_X(t)$ uniformément sur les compacts.

Théorème 3.9 (Levy) — La suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en loi si et seulement si ϕ_{X_n} converge simplement vers une fonction continue en 0.

Références

[1] Paulo Baldi, Laurent Mazliak, Pierre Priouret. *Martingales et chaînes de Markov.* Hermann, 1998.

[2] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Dunod, 1999.

[3] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[4] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.

[5] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.