Analyse 38 – Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Soit $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ avec Ω métrique et X mesuré, $t_0 \in \Omega$ et $F : \Omega \to \mathbb{C}, t \mapsto \int_X f(t,x)dx$.

1. Régularité des fonctions définies par une intégrale à paramètre

1.1. Continuité.

Théorème. *On suppose que*
- *$x \mapsto f(t,x)$ est mesurable pour tout $t \in \Omega$,*
- *$t \mapsto f(t,x)$ est continue en t_0 pour tout $x \in X$,*
- *il existe un voisinage compact V de t_0 dans Ω et $g \in L^1(X)$ tels que : $|f(t,x)| \leq g(x)$,$\forall (t,x) \in V \times X$.*

Alors $F(t_0)$ existe et F est continue en t_0.

Exemple. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}dx$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème. *Si $f : [a,b] \times X \to \mathbb{C}$ est continue avec X compact alors F est continue sur $[a,b]$.*

1.2. Dérivabilité. Ω est ici un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème. *On suppose que*
- *$x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \Omega$,*
- *$t \mapsto f(t,x)$ est dérivable pour tout $x \in X$,*
- *il existe un voisinage compact V de t_0 dans Ω et $g \in L^1(X)$ tels que : $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$,$\forall (t,x) \in V \times X$.*

Alors F est dérivable en t_0 de dérivée $\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$.

Exemple. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \log(b) - \log(a)$ pour $a,b > 0$.

Théorème. *Si $f : [a,b] \times X \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec X compact alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et on a $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$.*

Application. Si $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ est continue alors on a $\int_a^b \int_c^d f(t,x)dxdt = \int_c^d \int_a^b f(t,x)dtdx$.

1.3. Holomorphie. Ω est ici un domaine de $\mathbb{C}$.

Théorème. *On suppose que*
- *$x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \Omega$,*
- *$t \mapsto f(t,x)$ est holomorphe sur Ω pour tout $x \in X$,*
- *il existe un voisinage compact V de t_0 dans Ω et $g \in L^1(X)$ tels que : $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$,$\forall (t,x) \in V \times X$.*

Alors F est holomorphe en t_0 et $F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx$.

Application. La fonction Γ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.

Application. La fonction ζ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ avec pôle simple en 1.

1.4. Cas des intégrales semi-convergentes.

Dans la plupart des cas, par une intégration par parties, on se ramène au cas des intégrales semi-convergentes.

Exemple. $t \in [0,+\infty[\to \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$ est continue.

2. Approximation et régularisation

2.1. Propriétés du produit de convolution.

Soit $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ deux fonctions.

Définition. Le *produit de convolution* de f et g est

$$f \star g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t-x)dx.$$

Théorème. *Soit $1 \leq p,q \leq +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors $f \star g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et on a $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dont l'une au moins est à support compact. Alors $f \star g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq k$, on a $D^\alpha(f \star g) = D^\alpha f \star g$.*

2.2. Approximation par convolution.

Définition. On appelle *approximation de l'unité* toute suite $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $p_j \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x)dx = 1$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{j\to+\infty} \int_{\{\|x\|\geq\varepsilon\}} p_j(x)dx = 0$

Exemple. $p_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{j^2x^2}{2}}$, $p_j(x) = \frac{1}{j}\left(\frac{\sin\frac{jx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$, $p_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$.

Théorème. *Soit $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.*

(i) Si $f \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ alors, pour tout $|\alpha| \leq k$, on a

$$\lim_{j\to+\infty} \|D^\alpha(f \star p_j) - D^\alpha f\|_\infty = 0.$$

(ii) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$ alors on a

$$\lim_{j\to+\infty} \|f \star p_j - f\|_p = 0.$$

Application. Théorèmes de Fejer et de Weierstrass.

Application. $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ et dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Application. Pour tout $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^1)$, il existe un unique $f \in \mathcal{C}^0(\overline{D(0,1)})$ tel que $\Delta f \equiv 0$ sur $D(0,1)$ et $f_{|\mathbb{S}^1} \equiv g$.

3. Représentation intégrale par la transformée de Fourier

3.1. Définition dans L^1 et propriétés.

Définition. La *transformée de Fourier* de $f \in L^1(\mathbb{R})$ est définie par $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{-i\xi x}dx.$

Propriétés. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors*

(i) $\widehat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

(ii) si $xf \in L^1(\mathbb{R})$ alors $(\widehat{f})'(\xi) = -\widehat{ixf}(\xi)$

(iii) si $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$

(iv) si $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f \star g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$

Exemple. Si $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ alors $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Exemple. Si $f(x) = e^{-a|x|}$ avec $a > 0$ alors $\widehat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$.

Formule d'inversion. *Si $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors, pour presque tout x, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$.*

Application. $L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), f \mapsto \widehat{f}$ est injective

Formule sommatoire de Poisson.

3.2. Transformée de Fourier dans L^2.

3.2.1. *Construction.*

3.2.2. *Vecteur propres de la transformation de Fourier.*

4. Représentations intégrales de fonctions holomorphes

4.1. Formule de Cauchy.

Formule de Cauchy. *Soit f holomorphe sur un domaine Ω de $\mathbb{C}$ et soit $z \in \Omega$, alors $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$.*

Conséquence. Une fonction f est holomorphe si et seulement si elle est analytique.

Application. Formule des résidus

Exemple. $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}dx = 0$

4.2. Espace de Bergman.

Définition. L'*espace de Bergman* du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ est défini par $\mathrm{A}^2(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ et est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dz$.

Proposition. $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ *est un espace de Hilbert donc une base hilbertienne est $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$.*

Application. $k(\zeta, z) = \dfrac{1}{\pi(1-\overline{\zeta}z)^2}$ est un noyau reproduisant.

Développements

Prolongement de la fonction ζ.

Formule sommatoire de Poisson.

Vecteurs propres de la transformation de Fourier.

Espace de Bergman.

Références

[1] A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 2*, Dunod, 1996.

[2] S. Chatterji, *Cours d'Analyse*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.

[3] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.

[4] H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2002.