Séries entières : convergence, propriétés de la somme.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Rayon de convergence.

Lemme 1.1 (Abel) — Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière, $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $a_n z_0^n$ soit bornée et $r < |z_0|$. Alors la série converge normalement dans le disque $\{ z \in \mathbb{C} \,;\, |z| \leq r \}$. [2], Sect. 4.4

Définition 1.2 — Le nombre $R = \sup \{ r \geq 0 \,;\, \text{la suite } |a_n| \cdot r^n \text{ est bornée} \}$ est le rayon de convergence de la série entière.

Proposition 1.3 — Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors

1. pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$, la série converge absolument ;
2. pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$, la série diverge ;
3. pour tout $0 \leq r < R$, la série converge normalement sur le disque $\{ z \in \mathbb{C} \,;\, |z| \leq r \}$.

Proposition 1.4 (règle de d'Alembert) — Si $\lim_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ alors $R = \lambda^{-1}$.

Proposition 1.5 (règle de Cauchy) — Si $\lim_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lambda$ alors $R = \lambda^{-1}$.

Proposition 1.6 (règle de Hadamard) — Si $\overline{\lim}_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lambda$ alors $R = \lambda^{-1}$.

Proposition 1.7 — Soient $S_1(z) = \sum a_n z^n$ et $S_2(z) = \sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_1 et R_2.

1. Le rayon de convergence de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$, appelée somme des séries entières $S_1(z)$ et $S_2(z)$, est $\geq \min(R_1, R_2)$.
2. De même, le rayon de convergence de la série $\sum c_n z^n$, où

$$c_n \; = \; a_0 b_n \; + \; a_1 b_{n-1} \; + \; \cdots \; + \; a_n b_0$$

   appelée produit de Cauchy des séries $S_1(z)$ et $S_2(z)$ est $\geq \min(R_1, R_2)$.

2 Propriétés de la somme à l'intérieur du disque de convergence.

Proposition 2.1 — La somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ est holomorphe dans son disque de convergence. De plus, pour tout $n \geq 0$,

$$a_n \; = \; \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}$$

Théorème 2.2 (principe des zéros isolés) — Soient f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si f n'est pas identiquement nulle alors l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans $D(0, R)$. [3], Sect. 10.4

Application 2.3 — Pour tout $a > 1$, notons f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = \frac{1}{x-a} \qquad x \in [0,1]$$

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement supérieurs à 1 et de limite $+\infty$. Alors l'espace vectoriel $V = \text{vect}(f_{a_n}, n \geq 0)$ est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$. [1], Sect. 2.1

Théorème 2.4 (Liouville) — Si f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = \infty$ est bornée sur $\mathbb{C}$ alors f est constante. [2], Sect. 4.4

Application 2.5 (d'Alembert) — Le corps des nombres complexes est algébriquement clos.

3 Comportement sur le cercle d'incertitude.

Théorème 3.1 (Abel radial) — Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,\infty[$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$. Si

$$\sum a_n z_0^n < \infty$$

alors $f(z)$ converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$. [4], Sect. 3.1

Théorème 3.2 (Abel non tangentiel) — Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ de module R tel que la série converge pour $z = z_0$. Alors pour tout $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\rho \in [0, 2\cos\varphi[$

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\in\Delta(z_0,\rho,\varphi)}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

où $\Delta(z_0,\rho,\varphi) = \{ z_0(1-re^{i\theta})\,;\, 0 \leq r \leq \rho, |\theta| \leq \varphi \}$ [2], Sect. 4.4

Définition 3.3 — Soient Γ le cercle d'incertitude de la série entière

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

et D son disque de convergence. Un élément $a \in \Gamma$ est dit régulier s'il existe un disque ouvert D_a centré en a tel que f admette un prolongement analytique sur $D \cup D_a$, singulier dans le cas contraire. [4], Sect. 3.4

Théorème 3.4 — L'ensemble des points singuliers d'une série entière de rayon de convergence $R < +\infty$ est non vide. [4], Sect. 3.4

Définition 3.5 — Si tout point du cercle d'incertitude Γ est singulier, Γ est appelé frontière naturelle de la série entière.

Exemple 3.6 — Le cercle unité est la frontière naturelle de la série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

Références

[1] Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation. Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[3] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1995.

[4] Claude Zuily, Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.