SESSION DE 1990 — **COMPOSITION D'ANALYSE** — CONCOURS EXTERNE

DURÉE : 6 heures

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et de la clarté des solutions.

PRÉAMBULE

Le but du problème est l'étude de l'équation différentielle :

$$(E_{\lambda,\varepsilon}) \qquad u''(x) + (\lambda - 2\varepsilon \cos 2x)\, u(x) = 0,$$

où u est une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^2, et λ et ε sont des paramètres réels. Les parties III et IV sont consacrées à l'étude de matrices carrées d'ordre 2 et de déterminant 1, et sont indépendantes des parties I et II ; elles introduisent des méthodes reprises dans la partie VII.

Notations

Si α appartient à $\mathbf{C}$, on note Re α sa partie réelle, Im α sa partie imaginaire, $|\alpha|$ son module, Arg α son argument et $\overline{\alpha}$ son conjugué.

Si A est une matrice, on note tr A sa trace, det A son déterminant, A^n sa puissance n-ième. Si A est inversible, A^n est définie pour n appartenant à $\mathbf{Z}$. On notera dim F la dimension de l'espace vectoriel F.

Pour une fonction $u(x,\lambda)$ ou $u_\lambda(x)$ on notera u' sa dérivée par rapport à x et $\dot{u}$ sa dérivée par rapport à λ, quand ces dérivées existent.

Définitions

Une application $u(x)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est dite :

T-périodique si $u(x+T) = u(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}$,
T-antipériodique si $u(x+T) = -u(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

I. SUITES RÉCURRENTES

Dans toute cette partie I, le paramètre ε est supposé strictement positif.

On considère des suites de nombres complexes, indexées par $\mathbf{Z}$. Si $c = (c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une telle suite, on note $\sigma(c)$ la suite $\sigma(c) = (c_{-n})_{n\in\mathbf{Z}}$. On dira que la suite c est paire si $\sigma(c) = c$, que la suite c est impaire si $\sigma(c) = -c$. On dira que c est bornée à droite si $\{c_n,\ n \geq 0\}$ est borné. On dira que c est bornée si c et $\sigma(c)$ sont bornées à droite.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On note $L_{\lambda,\varepsilon}$ l'ensemble des suites $c = (c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, vérifiant : $L_{\lambda,\varepsilon}$

$$\varepsilon\, c_{n+1} + (4n^2 - \lambda)\, c_n + \varepsilon\, c_{n-1} = 0, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

Pour abréger on notera simplement $L = L_{\lambda,\varepsilon}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. De même on notera $B^+ = B_{\lambda,\varepsilon}^+$ le sous-espace vectoriel de L formé des suites bornées à droite, et $B = B_{\lambda,\varepsilon}$ le sous-espace vectoriel de L formé des suites bornées.

1. Montrer que L est un espace vectoriel de dimension 2, dont une base est formée d'une suite paire et d'une suite impaire.

   Soit c et d des éléments de L. Montrer que :

$$c_n d_{n+1} - c_{n+1} d_n = c_0 d_1 - c_1 d_0, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

2. Soit $c \in B^+$. Étudier la convergence de c_n quand n tend vers $+\infty$.
   Montrer que B^+ est de dimension au plus égale à 1.

Tournez la page S.V.P.

3. Soit c un élément de B. Montrer que c est paire ou impaire. Montrer que la borne supérieure M de l'ensemble $\{ \mid c_n \mid , \ n \in \mathbf{Z} \}$ est atteinte. Montrer que si $\lambda < -2\varepsilon$, alors c est la suite nulle.

4. On note $\lambda_+ = \max(\lambda, 0)$. Soit $c \in$ B et p un entier strictement positif.
Montrer que pour tout n tel que $n \geq p + \frac{1}{2}(\lambda_+)^{\frac{1}{2}}$ on a :

$$\mid c_n \mid \leq \frac{M(2\varepsilon)^p}{(4n^2 - \lambda)(4(n-1)^2 - \lambda) \dots (4(n-p+1)^2 - \lambda)}$$

5. Soit $c \in$ B. Montrer que pour tout $\rho > 0$ il existe une constante $M(\rho) > 0$, telle que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on ait :
$\mid c_n \mid \leq M(\rho) \exp(-\rho \mid n \mid)$; pour n convenable on pourra utiliser la majoration de 4. avec $p = \left[\frac{n}{2}\right]$ $\left(\text{partie entière de } \frac{n}{2}\right)$.

II. SÉRIES DE FOURIER

Dans cette partie on suppose encore $\varepsilon > 0$, et on considère l'équation $(E_{\lambda,\varepsilon})$.

1. Soit $u(x)$ une fonction π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe C^∞, et soit $\Sigma_{n\in\mathbf{Z}}\, c_n \exp(i\,2nx)$ sa série de Fourier. On note c la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ avec :

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(t)\exp(-i\,2nt)\,dt.$$

Montrer que $u(x)$ est solution de l'équation différentielle $(E_{\lambda,\varepsilon})$ si et seulement si la suite c appartient à $B_{\lambda,\varepsilon}$. En déduire que $u(x)$ est alors paire ou impaire.

2. Soit $u(x)$ une solution π-périodique de $(E_{\lambda,\varepsilon})$. Montrer que la fonction $u(x)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier.

3. Soit $u(x)$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe C^∞, π-antipériodique, et soit $\Sigma_{n\in\mathbf{Z}}\, c'_n \exp(i(2n+1)x)$ sa série de Fourier. On note c' la suite $(c'_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ avec :

$$c'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(t)\exp(-i(2n+1)t)\,dt.$$

Montrer que $u(x)$ est solution de l'équation différentielle $(E_{\lambda,\varepsilon})$ si et seulement si c' appartient à $B'_{\lambda,\varepsilon}$ où $B'_{\lambda,\varepsilon}$ est l'espace des suites bornées indexées par $\mathbf{Z}$ et vérifiant une relation de récurrence que l'on établira.

Montrer que $\dim(B'_{\lambda,\varepsilon}) \leq 1$, que les éléments de $B'_{\lambda,\varepsilon}$ respectent une symétrie que l'on établira, que $\dim(B'_{\lambda,\varepsilon}) = 0$ si $\lambda < 1 - 2\varepsilon$, et que si c' appartient à $B'_{\lambda,\varepsilon}$, la fonction $u(x)$ est paire ou impaire.

On admettra le fait qu'une solution π-antipériodique de $(E_{\lambda,\varepsilon})$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier.

III. MATRICES

On considère les ensembles suivants de matrices carrées d'ordre 2 :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbf{R} ; ad - bc = 1 \right\}$$

$$\hat{G} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbf{C} ; \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1 \right\}$$

On admettra le fait que ce sont des groupes multiplicatifs.

Tournez la page S.V.P.

1. Soit A un élément de G. On note τ la trace de A.

   Montrer que A admet une valeur propre μ qui vérifie $1 \leq |\mu|$ et $0 \leq \operatorname{Im} \mu$. Exprimer μ en fonction de τ. Tracer la courbe du plan complexe décrite par $\mu(\tau)$ quand τ décrit $\mathbf{R}$, ainsi que la courbe décrite par l'autre valeur propre de A.

2. Pour A élément de G, montrer l'équivalence des trois assertions :

   i. $-2 \leq \tau \leq 2$;
   ii. $\mu(\tau)$ est de module 1 ;
   iii. Il existe v non nul dans $\mathbf{R}^2$ tel que l'ensemble $\{A^n v,\ n \in \mathbf{Z}\}$ soit borné.

3. Pour $A \in G$ on pose : $\Phi(A) = \hat{A} = CAC^{-1}$, où C est la matrice : $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$

   Montrer que Φ est une bijection de G sur $\hat{G}$. Expliciter les coefficients α, β de $\hat{A}$ en fonction des coefficients a, b, c, d de A.

   En conclure que Φ est un isomorphisme de groupe de G sur $\hat{G}$.

4. Soit $\hat{A}$, $\hat{A}'$, $\hat{A}''$ des éléments de $\hat{G}$ de coefficients respectifs (α, β), (α', β'), (α'', β''). On suppose que : $\hat{A} = \hat{A}'\hat{A}''$. Montrer que $\operatorname{Re}(\alpha(\alpha')^{-1}(\alpha'')^{-1})$ est > 0.

IV. MATRICES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Dans cette partie, on étudie des matrices de G, dépendant d'un paramètre réel t. On note : $A(t) = \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $(t_j)_{j>0}$ une suite de réels. Pour n entier positif on pose :

$$A_n(t) = A(t - t_1) \cdot A(t - t_2) \cdot \ \ldots\ A(t - t_n),$$

$$\hat{A}_n(t) = \Phi(A_n(t)).$$

On notera :

$$A_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix} \qquad \hat{A}_n(t) = \begin{pmatrix} \alpha_n(t) & \beta_n(t) \\ \overline{\beta_n(t)} & \overline{\alpha_n(t)} \end{pmatrix}$$

et $\tau_n(t) = \operatorname{tr}(A_n(t)) = a_n(t) + d_n(t) = 2 \operatorname{Re} \alpha_n(t)$.

1. Montrer que les coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$, $\alpha_n(t)$ et $\beta_n(t)$ sont des polynômes de la variable t. Trouver leurs degrés respectifs, ainsi que les termes de plus haut degré de $a_n(t)$ et $\alpha_n(t)$.

   En déduire que $\tau_n(t)$ est un polynôme de degré n dont le terme de plus haut degré est $(-t)^n$.

2. Montrer qu'il existe une fonction $\phi_n(t)$ continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que :

   i. Pour tout t, $\phi_n(t) = \operatorname{Arg}(\alpha_n(t))$ modulo 2π ;
   ii. $\lim\limits_{t \to -\infty} \phi_n(t) = 0$.

   $\left(\text{On pourra considérer une primitive de } \operatorname{Im} \dfrac{\alpha_n'}{\alpha_n}.\right)$

3. Montrer que : $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi_n(t) = n\pi$.

   (On pourra procéder par récurrence et utiliser III.4.)

Tournez la page S.V.P.

4. Montrer qu'il existe des réels $s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1}$, tels que pour $j = 1, \ldots, n-1$: $\phi_n(s_j) = j\pi$.

   En déduire que pour tout θ tel que $-2 < \theta < 2$, l'équation $\tau_n(t) = \theta$ admet n racines réelles distinctes $\gamma_j(\theta), j = 1, 2, \ldots, n$, avec $-\infty < \gamma_1(\theta) < \gamma_2(\theta) < \ldots < \gamma_n(\theta) < +\infty$.

5. Soit $S'_n = \{t \in \mathbf{R}, -2 < \tau_n(t) < 2\}$.

   Montrer que les fonctions $\gamma_j(\theta)$ sont monotones et C^∞ sur l'intervalle $]-2, 2[$. En déduire que S'_n est la réunion de n intervalles ouverts disjoints.

6. Montrer que les racines des équations $\tau_n(t) = 2$ et $\tau_n(t) = -2$, sont réelles et au plus doubles. Trouver une relation entre les nombres δ_n^+ et δ_n^- de racines doubles de ces équations et le nombre σ_n de composantes connexes de l'ensemble : $S_n = \{t \in \mathbf{R}; -2 \le \tau_n(t) \le 2\}$.

7. Dans cette question on suppose les t_i tous nuls. On a donc $A_n(t) = (A(t))^n$. Déterminer l'ensemble S_n ainsi que les racines des équations $\tau_n(t) = 2$ et $\tau_n(t) = -2$.

V. SOLUTIONS FONDAMENTALES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Dans cette partie et la suivante le paramètre ε est positif ou nul.

On notera $C = C_{\lambda,\varepsilon}(x)$ et $S = S_{\lambda,\varepsilon}(x)$ les solutions fondamentales de l'équation $(E_{\lambda,\varepsilon})$. Donc les fonctions $C(x)$ et $S(x)$ sont solutions de $(E_{\lambda,\varepsilon})$ et vérifient :

$$C(0) = 1, \quad C'(0) = 0$$
$$S(0) = 0, \quad S'(0) = 1.$$

Pour $\varepsilon = 0$, l'équation $(E_{\lambda,0})$ est simplement :

$$u''(x) + \lambda\, u(x) = 0,$$

et on notera $c_\lambda = C_{\lambda,0}$ et $s_\lambda = S_{\lambda,0}$, ses solutions fondamentales.

1. Donner à l'aide de fonctions usuelles les expressions de c_λ et s_λ quand λ est respectivement positif, négatif, nul. Donner les développements en séries entières de c_λ et s_λ et déterminer les rayons de convergence. Montrer que les fonctions de deux variables : $(x, \lambda) \to c_\lambda(x)$ et $(x, \lambda) \to s_\lambda(x)$ sont de classe C^2.

2. Montrer que $C(x) = C_{\lambda,\varepsilon}(x)$ est solution de l'équation intégrale :

$$C(x) = c_\lambda(x) + \varepsilon \int_0^x s_\lambda(x - t)\,(2\cos 2t)\,C(t)\,dt.$$

3. Soit $g_n(x, \lambda)$ la suite de fonctions définie par récurrence :

$$g_0(x, \lambda) = c_\lambda(x), \text{ et pour } n > 0 :$$
$$g_n(x, \lambda) = \int_0^x s_\lambda(x - t)(2\cos 2t)\, g_{n-1}(t, \lambda)\,dt.$$

   Soit I un intervalle borné R. Établir la majoration :

$$|g_n(x, \lambda)| \le \frac{(M(I))^{n+1} x^n}{n!} \quad \forall x \in [0, \pi], \forall \lambda \in I,$$

   où M (I) est une constante dépendant de l'intervalle borné I.

   En déduire la convergence normale de la série de fonctions $\Sigma_{n \ge 0}\, \varepsilon^n g_n(x, \lambda)$ sur tout ensemble $\{(\varepsilon, x, \lambda);\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0, 0 \le x \le \pi, \lambda \in I\}$ et montrer que sa somme est $C_{\lambda,\varepsilon}(x)$.

4. Montrer qu'il existe une fonction continue $M_1(\varepsilon)$ telle que pour $\lambda > 1$, $|C_{\lambda,\varepsilon}(\pi) - c_\lambda(\pi)| \le M_1(\varepsilon)\lambda^{-1/2}$.

   On admettra que les fonctions de trois variables $(x, \lambda, \varepsilon) \mapsto C_{\lambda,\varepsilon}(x)$ et $(x, \lambda, \varepsilon) \mapsto S_{\lambda,\varepsilon}(x)$ sont de classe C^∞, et qu'il existe une fonction continue $M_2(\varepsilon)$ telle que pour $\lambda > 1$, $|S'_{\lambda,\varepsilon}(\pi) - s'_\lambda(\pi)| \le M_2(\varepsilon)\lambda^{-1/2}$.

Tournez la page S.V.P.

VI. UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Soit $h > 0$. Soit χ l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $\chi(\xi, \eta) = (x, y)$ avec :

$$x = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta \cdot$$

1. Trouver l'image par χ des ensembles $\{\xi = R\}$ et $\{\eta = R\}$. On notera ces images respectivement Γ_R et H_R.

2. Soient les ensembles :

$$U = \left\{(\xi, \eta) ; \xi > 0, 0 < \eta < \frac{\pi}{2}\right\}, \quad V = \{(x, y) ; x > 0, y > 0\}.$$

Montrer que χ induit un difféomorphisme de U sur V.

3. Soit $f(x, y)$ une fonction de V dans R. On dit que f vérifie la condition (D_1) s'il existe des fonctions C^∞ de R dans R, $u(\eta)$ et $v(\xi)$, telles que :

i. u est π-périodique ou π-antipériodique ;
ii. u et v sont toutes deux paires ou toutes deux impaires et $(u(0), u'(0)) = (v(0), v'(0)) \neq (0, 0)$;
iii. $f \circ \chi(\xi, \eta) = v(\xi)\, u(\eta)$ sur U.

Soit $\mu > 0$. On dit que f vérifie (D_2) si elle est solution sur V de :

$$f''_{x^2} + f''_{y^2} + \mu f = 0.$$

On admettra la formule :

$$h^2(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)\ ((f''_{x^2} + f''_{y^2}) \circ \chi) = 2\left((f \circ \chi)''_{\xi^2} + (f \circ \chi)''_{\eta^2}\right).$$

Soit f vérifiant (D_1). Montrer que si f vérifie (D_2) la fonction u est solution d'une équation $(E_{\lambda,\varepsilon})$. Trouver ε en fonction de μ. En déduire que dans ce cas u se prolonge en une fonction holomorphe sur C tout entier.

4. Montrer que dans ce cas v est aussi solution d'une équation différentielle que l'on déterminera. En déduire que : $v(\xi) = u(i\xi)$ ou $v(\xi) = -iu(i\xi)$.

VII. VALEURS PROPRES PÉRIODIQUES

Soit la matrice carrée d'ordre 2 :

$$A(\lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} S'_{\lambda,\varepsilon}(\pi) & C'_{\lambda,\varepsilon}(\pi) \\ S_{\lambda,\varepsilon}(\pi) & C_{\lambda,\varepsilon}(\pi) \end{pmatrix}$$

indices : λ, ε

et $\tau(\lambda, \varepsilon)$ sa trace.

1. Montrer que si u est solution de $(E_{\lambda,\varepsilon})$, alors les applications $x \mapsto u(-x)$ et $x \mapsto u(\pi + x)$, sont aussi solutions. Montrer que $A(\lambda, \varepsilon)$ est la matrice de l'application linéaire $u(.) \mapsto u(\pi + .)$ dans une certaine base, et que $A(\lambda, \varepsilon)$ appartient à G.

2. Montrer l'équivalence entre les assertions :

i. $A(\lambda, \varepsilon)$ admet pour valeur propre 1 ou -1 ;
ii. $(E_{\lambda,\varepsilon})$ admet une solution π-périodique non nulle, ou une solution π-antipériodique non nulle.

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout λ réel la matrice $A(\lambda, \varepsilon)$ est différente de I_2 et de $-I_2$.

3. Montrer que les assertions i. et ii. du 2. sont équivalentes à :

iii. $S_{\lambda,\varepsilon}(\pi) . C'_{\lambda,\varepsilon}(\pi) = 0$.

(On pourra considérer l'application $u(.) \mapsto u(\pi - .)$.)

Tournez la page S.V.P.

4. Montrer que C et S vérifient l'équation aux dérivées partielles, en λ et en x :

$$u^2 = (\dot{u}u' - \dot{u}'u)'.$$

(On pourra dériver par rapport à λ l'équation $(E_{\lambda,\varepsilon})$.)

Calculer les intégrales :

$$\int_0^\pi (C_{\lambda,\varepsilon}(t))^2 dt, \quad \text{et} \quad \int_0^\pi (S_{\lambda,\varepsilon}(t))^2 dt,$$

et en déduire que l'équation en λ :

$$S_{\lambda,\varepsilon}(\pi) . C'_{\lambda,\varepsilon}(\pi) = 0$$

n'a que des racines simples.

5. Montrer l'équivalence entre les deux assertions :
   i. $(E_{\lambda,\varepsilon})$ admet une solution bornée sur tout **R**,
   ii. $-2 \leq \tau(\lambda, \varepsilon) \leq 2$.

6. On note $F_{\lambda,\varepsilon}$ l'espace vectoriel des solutions 2π-périodiques de l'équation différentielle $(E_{\lambda,\varepsilon})$. Pour ε fixé, λ est dite valeur propre périodique simple de $(E_{\lambda,\varepsilon})$ si $\dim F_{\lambda,\varepsilon} = 1$ et valeur propre périodique double si $\dim F_{\lambda,\varepsilon} = 2$.

   On note $\Lambda(\varepsilon)$ l'ensemble des λ tels que $-2 \leq \tau(\lambda, \varepsilon) \leq 2$.

   a. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ les valeurs propres périodiques de $(E_{\lambda,\varepsilon})$ forment une suite croissante $(\lambda_j(\varepsilon))$ $j = 0, 1, \ldots$, à priori finie ou infinie.
   b. Calculer $A(\lambda, o)$, $\tau(\lambda, 0)$ et le coefficient $\alpha(\lambda, 0)$ de $\Phi(A(\lambda, o))$.
   c. Trouver les valeurs propres périodiques de $(E_{\lambda,0})$, leur multiplicité, ainsi que l'ensemble $\Lambda(0)$.

7. Soit $\varepsilon > 0$ et $B > 0$ donnés.

   a. Montrer qu'il existe $\lambda' > B$ tel que $\tau(\lambda', 0) = 0$, et $|\tau(\lambda', \varepsilon')| < 1$ pour $\varepsilon' \leq \varepsilon$.

   Pour $0 \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$, soit $N(\varepsilon')$ le nombre de valeurs propres périodiques de $(E_{\lambda,\varepsilon'})$ comptées avec leur multiplicité dans l'intervalle $]-\infty, \lambda']$.

   b. Montrer que $N(\varepsilon')$ est constant pour $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$.
   c. Montrer, en considérant d'une part l'argument du coefficient $\alpha(\lambda, \varepsilon')$ de $\Phi(A(\lambda, \varepsilon'))$ et d'autre part les variations de la fonction $\lambda \mapsto \tau(\lambda, \varepsilon')$, que pour ε' assez petit, on a $N(\varepsilon') = N(0)$.

8. Montrer que pour $\varepsilon > 0$, $\Lambda(\varepsilon)$ est une réunion dénombrable d'intervalles fermés disjoints dont on déterminera les extrémités.

• • •