concours externe de recrutement de professeurs agrégés

SESSION DE 1991

composition de mathématiques générales

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le but du problème est de présenter quelques résultats sur les zéros des polynômes complexes et de les appliquer aux séries entières.

Notation : Pour tout a élément de $\mathbb{C}$ et pour tout r élément de $[0, +\infty[$ on note $D(a, r)$ le disque fermé de centre a et de rayon r :

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}.$$

A. THÉORÈME DE GAUSS-LUCAS, SÉRIES LACUNAIRES

I. LE THÉORÈME DE GAUSS-LUCAS

1. **Enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel E.**

   a. Montrer qu'une intersection de parties convexes de E est convexe, éventuellement vide.

   b. Si A est une partie de E, montrer l'existence et l'unicité de C (A), partie convexe de E, telle que, pour tout convexe K de E, $A \subset K$ équivaut à $C(A) \subset K$.

   C (A) *est appelée enveloppe convexe de* A.

   c. Si $A = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, où les M_i sont des points de E, montrer que C (A) est l'ensemble des barycentres des systèmes (λ_i, M_i) tels que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ et, pour tout i, $\lambda_i \geqslant 0$.

2. **Le théorème de Gauss-Lucas.**

   Soit $P = c \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{n_i}$ un polynôme complexe non nul où les nombres complexes α_i sont deux à deux distincts et c est dans $\mathbb{C}$.

   a. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{P'}{P}$.

   b. Soit z un zéro de P' tel que $P(z) \neq 0$. Prouver l'égalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i \frac{z - \alpha_i}{|z - \alpha_i|^2} = 0$.

   c. Montrer que l'ensemble des zéros de P' est inclus dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des zéros de P. Ce résultat constitue le **théorème de Gauss-Lucas.**

3. **Application à la localisation des zéros dans un disque.**

   Montrer que si tous les zéros d'un polynôme P sont de module inférieur ou égal au réel strictement positif R, il en est de même pour les zéros de P'.

Tournez la page S.V.P.

II. SURJECTIVITÉ DES FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE SÉRIE LACUNAIRE

Dans tout le problème si $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n_k}$ converge et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes **non nuls**, on dira que la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}$ est lacunaire.

On suppose dans les questions 1 et 2 de cette partie A.II. que : $n_0 = 0$, $n_1 = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, et que la série entière lacunaire $1 - z + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k z^{n_k}$ converge pour tout z élément de $\mathbb{C}$.

On note $f(z)$ la somme de cette série. Pour tout d entier supérieur ou égal à 1, on note P_d, Q_d, R_d les trois polynômes suivants :

$$\mathrm{P}_d = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^{n_k}, \quad \mathrm{Q}_d(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{n_d}\mathrm{P}_d\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_d(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{n_d - 1}\mathrm{Q}'_d\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right).$$

1. **Borne du module d'un zéro du polynôme P_d.**
   a. Soit ρ un réel strictement positif, montrer que si P_d n'a pas de zéros dans $\mathrm{D}(0,\rho)$, R_d n'en a pas non plus.
   b. Calculer les coefficients du polynôme R_d.
   c. Montrer, par récurrence sur d, que P_d a au moins un zéro de module inférieur ou égal à ρ_d où $\rho_1 = 1$ et $\rho_d = \prod_{k=2}^{d}\frac{n_k}{n_k - 1}$ si $d \geqslant 2$.
   Indication : on pourra considérer le polynôme S tel que $\mathrm{R}_d(\mathrm{X}) = n_d\,\mathrm{S}\left(\frac{n_d - 1}{n_d}\mathrm{X}\right)$.

2. **Existence d'un zéro de f.**
   a. Montrer l'existence d'un réel M vérifiant : $\forall d \in \mathbb{N}^*,\ \exists z \in \mathbb{C} : (\mathrm{P}_d(z) = 0 \text{ et } |z| \leqslant \mathrm{M})$.
   b. Montrer que l'application f s'annule au moins une fois dans $\mathbb{C}$.

3. **Surjectivité de certaines sommes de séries lacunaires.**
   Montrer que si g est la somme d'une série entière lacunaire de rayon de convergence infini et si $g'(0) \neq 0$ alors l'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective.

B. LOCALISATION DES ZÉROS D'UN POLYNÔME

Dans cette partie B, on considère n un entier supérieur ou égal à 1.

Pour A élément de l'algèbre $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées complexes d'ordre n, dont le coefficient de ligne i et colonne j est noté $\mathrm{A}_{i,j}$, on pose :

$$\mathrm{L}_i = |\mathrm{A}_{i,i}| - \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}| \quad \text{et} \quad \alpha = \min\{\mathrm{L}_i : i = 1, \dots, n\}.$$

$\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, l'espace des matrices colonnes à n éléments, est muni de la norme $\|\ \|$ définie par :

$\|\mathrm{X}\| = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$, les nombres x_i étant les éléments de la matrice colonne X.

1. **Localisation des valeurs propres d'une matrice.**

   a. Dans cette question *a.* uniquement, on suppose que α est strictement positif.
   Montrer que $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\|\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}\| \geqslant \alpha\|\mathrm{X}\|$; en déduire que A est inversible.

A SUIVRE

b. On ne fait plus d'hypothèse sur α. Montrer que toute valeur propre de A est incluse dans :

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{D}\left(\mathrm{A}_{i,i},\ \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|\right).$$

2. **Application aux polynômes.**

Soit $\mathrm{P} = a_0 + a_1 \mathrm{X} + \ldots + a_{n-1} \mathrm{X}^{n-1} + \mathrm{X}^n$.

En étudiant la matrice :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdot & \cdot & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

montrer que tout zéro de P est dans l'ensemble :

$$\mathrm{D}(0, 1) \cup \mathrm{D}\left(-a_{n-1},\ \sum_{j=0}^{n-2} |a_j|\right).$$

3. **Nombre de zéros d'un polynôme situés dans un disque donné.**

Soit D un disque de rayon non nul et de frontière le cercle Γ, orienté dans le sens direct, et P un polynôme ne s'annulant pas sur Γ.

Montrer que le nombre des zéros de P, comptés avec leur multiplicité, qui sont situés dans D est égal à l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\mathrm{P}'(z)}{\mathrm{P}(z)} \mathrm{d}z.$$

C. LE THÉORÈME DE GRACE

Notations. — Dans cette partie C, p étant un élément de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{C}_p[\mathrm{X}]$ **l'espace des polynômes à coefficients complexes de degré au plus** p, et on définit la **forme bilinéaire d'apolarité,** G_p, sur $\mathbb{C}_p[\mathrm{X}]$ par :

$$\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in (\mathbb{C}_p[\mathrm{X}])^2,\ \mathrm{G}_p(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \mathrm{P}^{(k)}(0) \cdot \mathrm{Q}^{(p-k)}(0).$$

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ désigne le **groupe multiplicatif des matrices inversibles d'ordre 2 à coefficients complexes.**

Dans cette partie C, n est un élément fixe de $\mathbb{N}^*$.

On appelle **sphère de Riemann** l'ensemble, noté S, obtenu en adjoignant au plan complexe $\mathbb{C}$ un point, noté ∞.

S est donc l'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Les opérations de $\mathbb{C}$ sont, en partie, prolongées à S par :

pour $a \in \mathbb{C}$, $a + \infty = \infty + a = \infty$ et $a/\infty = 0$; $\infty \times \infty = \infty$;

pour $a \in \mathbb{C}^*$, $a \times \infty = \infty \times a = \infty$ et $a/0 = \infty$.

N.B. $\infty + \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞, $0/0$ n'ont pas de sens dans S.

1. **Action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sur la sphère de Riemann.**

Pour $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, matrice complexe inversible, on définit l'homographie associée :

$\mathrm{H_A} : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{S}$, par $\mathrm{H_A}(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ pour z dans $\mathbb{C}$ et $\mathrm{H_A}(\infty) = \dfrac{a}{c}$.

Tournez la page S.V.P.

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{H}$ des homographies de S est un sous-groupe du groupe des bijections de S sur elle-même et que l'application : $A \longrightarrow H_A$ est un morphisme surjectif du groupe $GL_2(\mathbb{C})$ sur le groupe H.

a. Déterminer le noyau de ce morphisme.

b. Montrer que $GL_2(\mathbb{C})$ est engendré par l'ensemble des matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } k \text{ décrit } \mathbb{C}^*.$$

Indication : On pourra utiliser des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes.

c. En déduire une partie génératrice de $\mathbb{H}$.

2. **Géométrie de la sphère de Riemann.**

$\mathbb{C}$ est muni de sa structure affine euclidienne naturelle.

On appellera **S-droite** toute droite de $\mathbb{C}$ complétée par ∞ ;

S-cercle tout cercle de $\mathbb{C}$ et toute droite de S ;

S-disque fermé :

i. tout disque fermé de $\mathbb{C}$ (de rayon strictement positif),
ii. tout complémentaire d'un disque ouvert non vide de $\mathbb{C}$ complété par ∞,
iii. tout demi-plan fermé de $\mathbb{C}$ complété par ∞.

a. Montrer que l'image d'un S-cercle (respectivement : d'un S-disque fermé) par une homographie est un S-cercle (respectivement : un S-disque fermé).

b. Montrer que tout S-cercle est l'image du cercle unité de $\mathbb{C}$, $\Gamma_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, par au moins une homographie et que tout S-disque fermé est l'image du disque unité de $\mathbb{C}$, $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, par au moins une homographie.

3. **Action de $GL_2(\mathbb{C})$ sur les polynômes et sur la forme d'apolarité.**

Pour P élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ élément de $GL_2(\mathbb{C})$, on définit l'élément A (P) de $\mathbb{C}_n[X]$ par :

$$A(P) = (-cX + a)^n \, P\left(\frac{dX - b}{-cX + a}\right).$$

a. Pour A et B dans $GL_2(\mathbb{C})$ et P dans $\mathbb{C}_n[X]$, montrer que $(AB)(P) = A(B(P))$.

b. Pour t nombre complexe, on considère la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que pour P et Q dans $\mathbb{C}_n[X]$ et t dans $\mathbb{C}$ on a : $G_n(P, Q) = G_n(A_t(P), A_t(Q))$.

c. Montrer que pour tous P et Q dans $\mathbb{C}_n[X]$ et toute A dans $GL_2(\mathbb{C})$, $G_n(P, Q) = 0$ si et seulement si $G_n(A(P), A(Q)) = 0$.

Si P et Q appartiennent à $\mathbb{C}_n[X]$, on dira que P et Q sont **apolaires** lorsque $G_n(P, Q) = 0$.

4. **Effet de l'action de $GL_2(\mathbb{C})$ sur les zéros des polynômes.**

Rappel. Les fonctions symétriques élémentaires sont définies par .

$$\sigma_p : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{I \subset \{1, 2, \ldots, n\} \\ \operatorname{card} I = p}} \prod_{i \in I} x_i, \quad \text{pour } 1 \leqslant p \leqslant n,$$

A SUIVRE

et : $\sigma_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Elles sont invariantes par permutation des x_i.

Notations.

Si le degré de P, polynôme non nul, est $m < n$, on dira que :

∞ est zéro de multiplicité $n - m$ de P.

Pour P élément de $\mathbb{C}_n[X]$ on appellera **zéros dans S** de P les nombres complexes z, tels que $P(z) = 0$ et ∞ si P est de degré strictement inférieur à n.

On prolonge à S les fonctions symétriques élémentaires en gardant l'invariance par permutation et en posant, pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ élément de $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}\sigma_p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k}, \infty, \ldots, \infty) &= 0 \quad \text{si } p \leqslant k-1, \\ &= \sigma_{p-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k}) \quad \text{si } n \geqslant p \geqslant k.\end{aligned}$$

a. Montrer que pour P élément non nul de $\mathbb{C}_n[X]$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est la famille des zéros dans S de P, comptés avec leur multiplicité, si et seulement si il existe un nombre complexe K non nul tel que :

$$P = K \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) X^{n-j}.$$

b. Soient P un élément non nul de $\mathbb{C}_n[X]$ et A un élément de $GL_2(\mathbb{C})$, montrer que la famille des zéros dans S de A (P) est l'image par l'homographie H_A de celle des zéros dans S de P.

5. **Le théorème de Grace.**

On considère P et Q, deux éléments apolaires de $\mathbb{C}_n[X]$, et on veut prouver que tout S-disque fermé contenant tous les zéros dans S de P contient au moins un zéro dans S de Q : ceci constitue le théorème de Grace.

Pour cela, nous raisonnerons par l'absurde en supposant que $G_n(P, Q) = 0$ et qu'il existe un S-disque fermé contenant tous les zéros dans S de P et aucun des zéros dans S de Q.

a. Montrer que, quitte à modifier P et Q, on peut supposer que :
- Q est de degré strictement inférieur à n;
- il existe un disque fermé D, de $\mathbb{C}$, contenant tous les zéros dans S de P ;
- aucun des zéros dans S de Q n'appartient à D.

b. Sous les hypothèses du *a.*, montrer : $G_{n-1}(P', Q) = 0$.

c. Prouver la propriété annoncée pour tout $n \geqslant 1$ et tout couple (P, Q) de polynômes non nuls de $\mathbb{C}_n[X]$.

6. **Autre forme du théorème de Grace.**

Soient D un S-disque fermé, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de D, $a_0, \ldots, a_n$ des nombres complexes vérifiant :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Montrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k X^k$ a au moins un zéro dans S, éventuellement ∞, appartenant à D.

7. **Application.**

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k X^k$ deux polynômes de degré n ; on suppose que les zéros de P (respectivement de Q) sont de module inférieur ou égal à un réel positif ou nul R_1 (respectivement R_2).

On pose : $H = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k b_k X^k$; montrer que tous les zéros de H sont de module inférieur ou égal à $R_1 R_2$.

Indication : On interprétera l'égalité $H(u) = 0$ en termes d'apolarité.

Tournez la page S.V.P.

D. LE THÉORÈME DE BIERNACKI SUR LES SOMMES DE SÉRIES LACUNAIRES

Le but de cette partie est de prouver que si $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n_k}$ converge et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{C}^*$ telle que $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors : pour tout $y \in \mathbb{C}$, l'équation $g(z) = y$ a une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$.

Comme précédemment, les zéros des polynômes dont il est question ici sont comptés avec leur multiplicité.

Il est recommandé d'utiliser les parties précédentes et en particulier les questions 5., 6. et 7. de la partie C.

1. **Préliminaire : zéros de la dérivée d'un produit.**

Soit Π_1 un polynôme de $\mathbb{C}_p[X]$, de degré $p \geqslant 1$, dont la famille des zéros est le p-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$ du disque fermé D_1 de $\mathbb{C}$, et Π_2 un polynôme de $\mathbb{C}_q[X]$, de degré $q \geqslant 1$, dont la famille des zéros est le q-uplet $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ du S-disque fermé D_2 ; on pose $\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2$.

a. Soit z un zéro dans $\mathbb{C}$ de Π' n'appartenant pas à D_1, montrer qu'il existe $\alpha \in D_1$ tel que :

$$(z-\alpha)^p \Pi_2'(z) + p(z-\alpha)^{p-1}\Pi_2(z) = 0,$$

puis qu'il existe $\beta \in D_2 \setminus \{\infty\}$ tel que :

$$q(z-\alpha)^p(z-\beta)^{q-1} + p(z-\alpha)^{p-1}(z-\beta)^q = 0.$$

b. On suppose dans cette question *b.* que $D_1 = D(A_1, R_1)$ et $D_2 = D(A_2, R_2)$ avec R_1 et R_2 strictement positifs ; montrer que tout zéro de Π' est dans $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ où D_3 est le disque de centre $\frac{qA_1 + pA_2}{p+q}$ et de rayon $\frac{qR_1 + pR_2}{p+q}$.

De plus, montrer, en faisant varier les α_i et les β_j, que si D_1, D_2 et D_3 sont deux à deux disjoints, Π' a exactement $p-1$ zéros dans D_1, $q-1$ zéros dans D_2 et un zéro dans D_3.

Indication: On utilisera la question B.3.

c. On suppose que les α_i sont de module strictement inférieur au nombre réel strictement positif R et que les β_j sont de module strictement supérieur à $(p+2q)\,R/p$.

Montrer que Π' a exactement $p-1$ zéros de module strictement inférieur à R.

2. **Application à la localisation des zéros dans un disque.**

Soient P un polynôme de degré n et de zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ avec $|\alpha_1| \leqslant |\alpha_2| \leqslant \ldots \leqslant |\alpha_n|$, R un nombre réel strictement positif et p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$; on suppose : $|\alpha_p| \leqslant R$. Montrer que P' a au moins $p-1$ zéros de module inférieur ou égal à $R \cdot \prod_{k=0}^{n-p} \frac{n+k}{n-k}$.

Indications : On fera une récurrence sur $n-p$.

Supposant la propriété vraie pour $n-p < k$, on montrera qu'elle est vraie pour $n-p = k$ en discutant selon la position de $|\alpha_{n-k+1}|$ par rapport à $R\,\frac{n+k}{n-k}$.

A SUIVRE

3. **Existence d'une infinité de zéros pour la somme d'une série lacunaire.**

On considère désormais :

$(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n_k}$ converge et telle que $n_0 = 0$.

$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^*$, telle que $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

On fixe deux entiers q et r tels que $0 < q < r$ et on posera :

$$p = n_q;$$

$$\mathrm{P}_d = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^{n_k}, \text{ pour } d \in \mathbb{N};$$

R le plus grand des modules des zéros de P_q ;

$$g_j(\mathrm{X}) = (n_r - \mathrm{X})(n_{r-1} - \mathrm{X})\dots(n_{r-j+1} - \mathrm{X}) \text{ pour } j = 1, \dots, r;$$

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \sum_{i=0}^{q} g_{r-q}(n_i)\, a_i \mathrm{X}^{n_i}.$$

On définit les polynômes F_j, $j = 0, \dots, r - q$, par :

$$\mathrm{F}_0(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{n_r}\mathrm{P}_r(1/\mathrm{X}) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}'_j(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{n_{r-j} - n_{r-j-1} - 1}\,\mathrm{F}_{j+1}(\mathrm{X}) \quad \text{pour} \quad j = 0, \dots, r - q - 1.$$

a. Montrer, en utilisant B et C, qu'il existe $\mathrm{C}(p)$, constante réelle ne dépendant que de p, telle que tous les zéros de Q sont de module inférieur ou égal à :

$$\mathrm{R}(p, r) = \mathrm{R}\cdot\mathrm{C}(p)\cdot \prod_{j=q+1}^{r} (1 - p/n_j)^{-1}.$$

b. Montrer que $\mathrm{F}_{r-q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^p \mathrm{Q}(1/\mathrm{X})$.

c. Montrer que, pour $j = r - q, \dots, 0$, F_j a au plus $n_{r-j} - p$ zéros de module strictement inférieur à :

$$\left(\mathrm{R}(p, r) \prod_{\substack{k=0\dots p-1\\ i=q+1\dots r-j}} \frac{n_i + k}{n_i - k}\right)^{-1}.$$

En déduire que P_r a au moins p zéros de module inférieur ou égal à :

$$\left(\mathrm{R}(p, r) \prod_{\substack{k=0\dots p-1\\ i=q+1\dots r}} \frac{n_i + k}{n_i - k}\right).$$

d. Montrer que l'équation : $f(z) = 0$ a une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$.

Indication : On utilisera le théorème suivant :

- Si f est holomorphe dans un voisinage du disque fermé D, de centre O, de rayon $\mathrm{R} > 0$ et de frontière Γ orientée dans le sens direct, et ne s'annule pas sur Γ :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \text{ est le nombre de zéros de } f \text{ dans D comptés avec multiplicité.}$$

4. **Le théorème de Biernacki.**

Soit g la somme d'une série entière lacunaire de rayon de convergence infini. Montrer que pour tout y élément de $\mathbb{C}$, l'équation $g(z) = y$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$.

FIN