page 86 1/12

Agrégation externe - Analyse - 1992

SESSION DE 1992

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition d'analyse

Durée : 6 heures

Les candidats composeront sur du papier de composition quadrillé 5 × 5.

Tout document est interdit.

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

PREAMBULE

Dans tout le problème , n désigne un entier strictement positif.

Les symboles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$ représentent respectivement les entiers relatifs , les nombres réels , réels positifs ou nuls et les nombres complexes .

Soit $\left(a_k\right)_{k\geq 1}$ une suite de nombres réels ou complexes; la notation $\prod_{k=1}^{+\infty} a_k$ désigne , quand elle existe , la limite de la suite $\left(\prod_{k=1}^{k=n} a_k\right)_{n\geq 1}$.

La première partie ne concerne que la variable réelle , les deux autres parties utilisent les fonctions holomorphes .

Tournez la page S.V.P.

I LA FONCTION GÉNÉRATRICE DES PARTITIONS.

A

Une partition de n est une suite finie et décroissante d'entiers $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_s > 0$ telle que $\sum_{k=1}^{k=s} r_k = n$.

Par exemple les partitions de 3 sont : (3);(2,1);(1,1,1) .

On note, <u>dans tout le problème</u>, **p(n)** le nombre des partitions de n .

1) Donner les partitions de 4 et de 5, ainsi que **p(4)** et **p(5)** .

2) Montrer que **p(n)** est aussi le nombre de suites $\left(y_k \right)_{k\geq 1}$ où pour tout $k\geq 1$, y_k est un entier positif ou nul et telles que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k y_k = n$$

3) Soit t un nombre réel tel que 0<t<1

a) Montrer que la suite $\left(u_N = \prod_{k=1}^{k=N} \frac{1}{1 - t^k} \right)_{N\geq 1}$

est strictement croissante et convergente.

■ <u>Dans toute la suite du problème</u>, on note $\mathbf{f(t)} = \prod_{k=1}^{+\infty} (1-t^k)^{-1}$ ■

b) Pour tout entier N≥1, justifier l'égalité suivante :

$$\prod_{k=1}^{k=N} \frac{1}{1 - t^k} = 1 + \sum_{n=1}^{n=N} p(n)\, t^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n(N)\, t^n$$

où les coefficients $a_n(N)$ sont des entiers dont on donnera une interprétation combinatoire et tels que $0 \leq a_n(N) \leq p(n)$.

c) Montrer que : $\quad \mathbf{f(t)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{p(n)}\, t^n$

d) Etablir que : $\mathrm{Ln}\, f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t^k}{1 - t^k} \right)$

où Ln représente la fonction logarithme népérien .

B

Soit α un réel strictement positif et h une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π et telle que pour $0<u<2\pi$ on ait $h(u)=e^{\alpha u}$.

1) Pour r élément de $\mathbb{Z}$, calculer $c_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(u)\, e^{-iru}\, du$

2) Etablir l'égalité :

$$\frac{1}{e^{2\pi\alpha} - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi\alpha} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + r^2}$$

3) Déduire de l'égalité précédente que : $\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}$

C

Soit x un réel strictement positif, on pose :

$$F(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - e^{-2\pi kx} \right)^{-1}$$

1) Montrer que F(x) est défini.

2) Montrer que :

$$\pi\, \mathrm{Ln}\, F(x) - \frac{\pi^2}{12\, x} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \left(-\frac{\pi}{2\, k} + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r^2\, x^{-1} + k^2\, x} \right)$$

(<u>Indication</u> : Utiliser A.3.d., B.2 et 3.)

Tournez la page S.V.P.

3) Soit u un réel strictement positif :

a) Etablir les inégalités suivantes :

$$0 \le \int_n^{+\infty} \frac{dv}{u + x^{-1} v^2} - \sum_{r=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u + x^{-1} r^2} \le \frac{x}{n^2}$$

b) En posant : $\sum\limits_{r=1}^{+\infty} = \sum\limits_{r=1}^{r=n} + \sum\limits_{r=n+1}^{+\infty}$, dans le membre de droite de l'égalité du C)2), montrer que :

$$\pi \,\mathrm{Ln}\, F(x) - \frac{\pi^2}{12x} - \pi \,\mathrm{Ln}\, F\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi^2 x}{12} = \lim_{n \to +\infty} \int_{x^{-1}}^{x} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2 w^2 + k^2} \right) dw$$

4) a) Montrer que : $\displaystyle\int_{x^{-1}}^{x} \left(\int_0^1 \frac{du}{w^2 + u^2} \right) dw = \frac{\pi}{2} \,\mathrm{Ln}\, x$

b) En déduire l'équation fonctionnelle :

$$e^{\pi x/12} \; F(x) = x^{1/2} \; e^{\pi/(12x)} \; F\left(\frac{1}{x}\right)$$

II LA FONCTION ÉTA DE DEDEKIND.

Dans toute la suite du problème, Re z , Im z et |z| sont respectivement la partie réelle, la partie imaginaire et le module du nombre complexe z; pour z appartenant à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, l'argument de z, noté Arg z , est tel que $0 < \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$; $\mathbf{H}$ désigne le demi-plan ouvert : $\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0 \}$ et i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et $i \in \mathbf{H}$.

page 90 5/12 - 1992 -
Agrégation externe - Analyse

A

1) Montrer que l'application : $\begin{array}{l} H \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \\ z \longmapsto z^2 \end{array}$ est une bijection holomorphe entre deux ouverts de $\mathbb{C}$, dont l'application holomorphe réciproque est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ & \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow & H \\ z = re^{i\theta}, (r > 0 \ ; \ 0 < \theta < 2\pi) & \longmapsto & \sqrt{z} = r^{1/2} e^{i\theta/2} \end{array}$$

■ Dans toute la suite du problème, le symbole $\sqrt{}$ désignera l'application précédente (branche holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ de $\sqrt{z}$). Pour éviter toute confusion, l'habituelle application racine carrée dans $\mathbb{R}_+$ est notée dans tout le texte : $r \longmapsto r^{1/2}$ ■

2) On admettra le théorème suivant :

Soit $\left(a_n(z)\right)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et telles que :

a) Pour tout z de Ω et pour tout n, $1 + a_n(z) \neq 0$.

b) la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(z)|$ converge uniformément sur tout compact de Ω .

Alors $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + a_n(z) \right)$ définit une fonction holomorphe sur Ω , ne s'annulant en aucun point de Ω .

Montrer que l'expression $\eta(z) = e^{i\pi z/12} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - e^{2i\pi nz} \right)$ définit une fonction holomorphe sur H , ne s'annulant en aucun point de H .

Tournez la page S.V.P.

3) Etablir, pour tout z de **H**, les égalités suivantes :

a) $\eta(z+1) = e^{i\pi/12}\ \eta(z)$

b) $\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = e^{-i\pi/4}\sqrt{z}\ \eta(z)$

(<u>Indication</u> : Etablir d'abord cette relation pour z = ix avec x>0 , et conclure en énonçant avec soin le théorème utilisé .)

4) Soit x>0 ; donner, quand x tend vers zéro, la limite et un équivalent de $\eta(ix)$.

B

Soient a,b,c,d des éléments de $\mathbb{Z}$ tels que : ad - bc = 1 avec (c > 0) ou (c = 0 et d = -1).

On note $g_{a,b,c,d}$ l'application : $z \in H \longmapsto z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$

<u>Dans toute la suite du problème</u>, on appelle Γ l'ensemble de toutes les applications $g_{a,b,c,d}$ précédentes.

<u>On admettra que</u> Γ **est un groupe pour la composition des applications dont les éléments sont des bijections de H sur lui-même .**

1) En écrivant z = x + iy , z' = x' + iy' avec x,y,x',y' réels, montrer que :

$$\frac{y}{y'} = (cx+d)^2 + c^2y^2$$

2) Soit z un élément de **H**, montrer qu'il existe un élément g° de Γ vérifiant les deux conditions suivantes :

a) $\operatorname{Im} g°(z) = \underset{g\in\Gamma}{\operatorname{Max}}\ (\operatorname{Im} g(z))$

(<u>Indication</u>: on pourra considérer la norme euclidienne :

$$(c,d) \longmapsto \left((cx+d)^2 + c^2y^2\right)^{1/2}$$.)

b) $\operatorname{Im} g°(z) \geq \dfrac{3^{1/2}}{2}$

C

On admettra que le groupe Γ est engendré par :

$(\gamma_0 = g_{-1,-1,0,-1} : z \longmapsto z+1)$ et $(\gamma_1 = g_{0,-1,1,0} : z \longmapsto -\dfrac{1}{z})$

1) a) Montrer que pour tout élément z de **H** et tout élément $g_{a,b,c,d}$ de Γ, on a l'égalité suivante :

$$\left[\eta\left(g_{a,b,c,d}(z)\right)\right]^{24} = \left[cz+d\right]^{12}\left[\eta(z)\right]^{24}$$

(Indication : Expliquer que si cette relation est vraie pour un élément g de Γ, elle est alors vraie pour $\gamma_0 \circ g$, $\gamma_0^{-1} \circ g$ et $\gamma_1 \circ g$.)

b) En déduire que :

$$\eta\left(g_{a,b,c,d}(z)\right) = \omega\sqrt{cz+d}\;\eta(z)$$

où ω est une racine 24$^{\text{éme}}$ de l'unité qui dépend de $g_{a,b,c,d}$, mais qui ne dépend pas de z appartenant à **H** .

2) On suppose que la fonction η possède un prolongement analytique sur un ouvert connexe Ω contenant strictement **H** .

a) Montrer que si Ω contient un point rationnel de l'axe réel, le prolongement de η s'annule en ce point .

(Indication : Utiliser II.A.4 et II.C.1.b)

b) En déduire qu'un tel ouvert Ω n'existe pas .

3) a) Etendre à tout nombre complexe t , tel que $|t|<1$, la relation : $$f(t) = \prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-t^k} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p(n)\,t^n$$

b) Justifier, pour tout élément z de **H**, l'égalité :

$$\eta(z)\;f(e^{2i\pi z}) = e^{i\pi z/12}$$

4) Sur quel ouvert connexe maximal de $\mathbb{C}$, la fonction **f** admet-elle un prolongement analytique ?

(Indication : Etudier $z \longmapsto e^{2i\pi z}$ au voisinage d'un point réel et utiliser II.C.2 .)

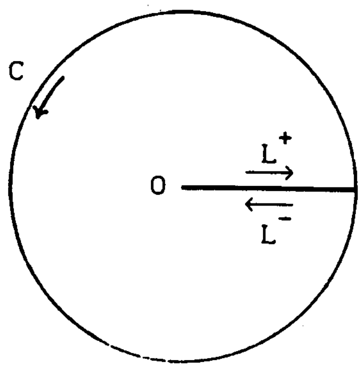
Tournez la page S.V.P.

■ Dans toute la suite du problème on appellera **f** ce prolongement analytique maximal . ■

5) La fonction η est-elle bornée sur **H** ? La fonction **f** s'annule-t-elle ? Déterminer Inf |**f**| et Sup |**f**| .

III LE DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE HARDY ET RAMANUJAN

A



Soient α, β et ρ des réels strictement positifs et tels que : $\alpha\rho > \beta/\rho$.

On définit les trois chemins orientés suivants :

$L^+ = \{ u \in \mathbb{R} \mid 0 \leq u \leq \rho \}$ orienté à u croissant.

$C = \{ u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \mid 0 < \operatorname{Arg} u < 2\pi \text{ et } |u| = \rho \}$ orienté à Arg u croissant.

$L^- = \{ u \in \mathbb{R} \mid 0 \leq u \leq \rho \}$ orienté à u décroissant.

On convient de définir $\sqrt{u} = u^{1/2}$ pour u élément de L^+ et $\sqrt{u} = -u^{1/2}$ pour u élement de L^-.

on pose : $$J(\alpha,\beta) = \sum_{\Delta \in \{L^+, C, L^-\}} \int_\Delta e^{-\alpha u - \frac{\beta}{u}} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

1) Montrer que $J(\alpha,\beta)$ existe .

2) Justifier l'égalité :

$$-\frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) = \sum_{\Delta \in \{L^+, C, L^-\}} \int_\Delta e^{-\alpha u - \frac{\beta}{u}} \sqrt{u}\, du$$

Soient les deux expressions :

$$v = \alpha^{1/2}\sqrt{u} + \frac{\beta^{1/2}}{\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad w = \alpha^{1/2}\sqrt{u} - \frac{\beta^{1/2}}{\sqrt{u}}$$

On convient aussi de noter v et w les changements de variable définis successivement sur L^+, C et L^- au moyen des deux expressions précédentes

3) Représenter graphiquement

a) La réunion des chemins orientés $v(L^+)$, $v(C)$ et $v(L^-)$.

b) La réunion des chemins orientés $w(L^+)$, $w(C)$ et $w(L^-)$.

(Indication : v(C) et w(C) sont des demi-ellipses.)

4) On admet que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\, dv = \pi^{1/2}$

a) Calculer v^2 et w^2, montrer que : $\dfrac{du}{\sqrt{u}} = \alpha^{-1/2}\,(dv + dw)$

b) établir l'égalité :

$$J(\alpha,\beta) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \left[e^{-2(\alpha\beta)^{1/2}} - e^{2(\alpha\beta)^{1/2}} \right]$$

B

Le calcul d'un développement asymptotique de **p(n)** est l'objet de la partie III et comportera trois étapes.

Première étape : On exprime **p(n)** comme une intégrale curviligne et on majore une partie négligeable de cette intégrale.

Tournez la page S.V.P.

On pose désormais : $\mathbf{m} = n - \frac{1}{24}$ et $\mathbf{d} = \pi \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2}$;

ε est un réel tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{8}$ et dont la valeur sera choisie ultérieurement. On définit les trois segments suivants sur $\mathrm{Im}\, z = \varepsilon$:

$$L_1 = \{ z \mid -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}\, z \le -(2\varepsilon)^{1/2} \text{ et } \mathrm{Im}\, z = \varepsilon \}$$

$$L_2 = \{ z \mid -(2\varepsilon)^{1/2} \le \mathrm{Re}\, z \le (2\varepsilon)^{1/2} \text{ et } \mathrm{Im}\, z = \varepsilon \}$$

$$L_3 = \{ z \mid (2\varepsilon)^{1/2} \le \mathrm{Re}\, z \le \frac{1}{2} \text{ et } \mathrm{Im}\, z = \varepsilon \}$$

1) Le segment $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ étant orienté à Re z croissant,

montrer que :
$$p(n) = \int_{L_1 \cup L_2 \cup L_3} e^{-2i\pi \mathbf{m} z} \frac{dz}{\eta(z)}$$

(Indication : Utiliser II.C.3.b.)

2) Soit z élément de $L_1 \cup L_3$; montrer qu'il existe un élément $g_{a,b,c,d}$ de Γ tel que, si on pose $y' = \mathrm{Im}\, g_{a,b,c,d}(z)$, on a successivement :

a) $y' \ge \dfrac{3^{1/2}}{2}$ et $c \ge 2$

b) $y' \le \dfrac{1}{4\varepsilon}$ et $\dfrac{1}{|\eta(z)|} \le \dfrac{1}{|\eta\circ g_{a,b,c,d}(z)|}$

3) Montrer qu'il existe un réel K_1 ne dépendant pas de ε, et tel que pour tout z de $L_1 \cup L_3$ on ait :

$$\frac{1}{|\eta(z)|} \le K_1 \, e^{\pi/(48\varepsilon)}$$

4) En choisissant ε au mieux, établir l'inégalité :

$$\left| \int_{L_1 \cup L_3} e^{-2i\pi \mathbf{m} z} \frac{dz}{\eta(z)} \right| \le K_1 \, e^{\frac{\mathbf{d}}{2} \mathbf{m}^{1/2}}$$

■ On donnera désormais à ε la valeur obtenue dans cette question. ■

C

<u>Deuxième étape</u> : Dans la partie principale de l'intégrale donnant **p(n)** on remplace $1/\eta(z)$ par une fonction plus simple et on majore l'erreur commise.

1) Montrer que, pour tout z de **H**, on a :

$$\frac{1}{\eta(z)} = e^{-i\pi/4} \; e^{i\pi/(12z)} \; \sqrt{z} \quad f\left(e^{-2i\pi/z} \right)$$

2) Etablir l'existence d'un réel K_2 ne dépendant pas de **m** et tel que :

$$\left| \int_{L_2} e^{-2i\pi mz} \frac{dz}{\eta(z)} - e^{-i\pi/4} \int_{L_2} e^{-2i\pi\left(mz - \frac{1}{24z}\right)} \sqrt{z}\, dz \right| \le K_2 \, e^{\frac{d}{4} m^{1/2}}$$

(<u>Indication</u> : ceci revient à remplacer **f(** $e^{-2i\pi/z}$ **)** par 1 .)

3) En faisant le changement de variable $u = iz$, obtenir :

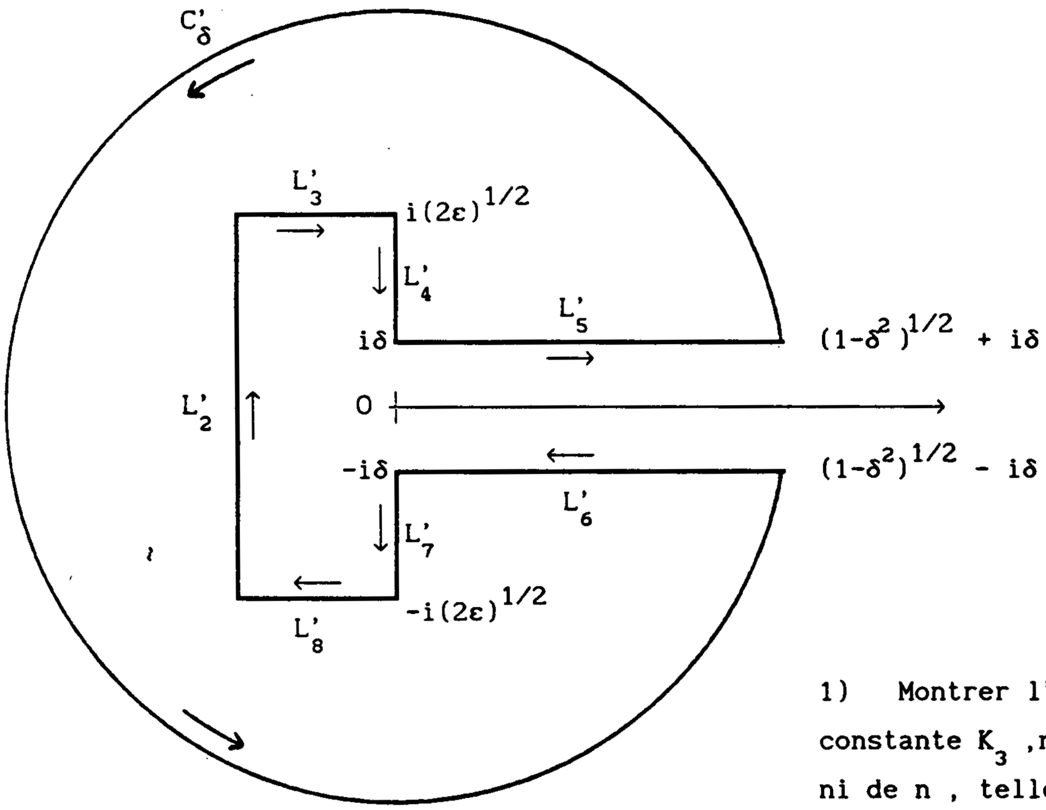
$$e^{-i\pi/4} \int_{L_2} e^{-2i\pi\left(mz - \frac{1}{24z}\right)} \sqrt{z}\, dz = - \int_{L'_2} e^{-2\pi\left(mu + \frac{1}{24u}\right)} \sqrt{u}\, du$$

où L'_2 est un segment orienté que l'on précisera .

D

<u>Troisième étape</u> : Dans la dernière intégrale obtenue , on remplace le chemin L'_2 par un autre chemin. Il faut donc estimer l'erreur commise avant d'utiliser , par un passage à la limite, les calculs du III.A.

Soit δ un réel tel que $0<\delta<(2\varepsilon)^{1/2}$, on définit un chemin fermé, de classe C^1 par morceaux, orienté dans le sens direct, au moyen de la figure ci-contre, où C'_δ est un arc inclus dans le cercle de centre O et de rayon 1 . On rappelle que les éléments de L'_2 ont pour partie réelle $-\varepsilon$.



1) Montrer l'existence d'une constante K_3, ne dépendant ni de δ ni de n , telle que :

$$\left| \int_{L'_3 \cup L'_4 \cup L'_7 \cup L'_8} e^{-2\pi\left(mu + \frac{1}{24u}\right)} \sqrt{u}\, du \right| \leq K_3 \, e^{\frac{d}{4} m^{1/2}}$$

2) Montrer que :

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{L'_5 \cup C'_\delta \cup L'_6} e^{-2\pi\left(mu + \frac{1}{24u}\right)} \sqrt{u}\, du = -\frac{\partial J}{\partial \alpha}\left(2\pi m \, , \, \pi/12 \right)$$

3) En prenant **m** comme infiniment grand principal, donner un développement asymptotique de **p(n)** .