composition d'analyse

Dans le problème n est un entier ≥ 2. *Si* $z = x + iy \in \mathbf{C}^n$ *avec* $x, y \in \mathbf{R}^n$, *on pose* $\mathrm{Re}\, z = x$, $\mathrm{Im}\, z = y$, $\bar{z} = x - iy$. *Si* $x = (x_j)_{j=1,\dots,n}$, $y = (y_j)_{j=1,\dots,n}$ *sont des vecteurs de* $\mathbf{C}^n$ *on note xy leur produit scalaire:* $xy = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. *Ainsi* $x^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$, *et la norme hermitienne de x est donnée par* $\|x\|^2 = x\bar{x}$. *Cette notation ne prête pas à confusion si on prend soin de parenthéser correctement les expressions où entrent plusieurs produits.*

On note B la boule unité ouverte de $\mathbf{R}^n$: *ensemble des* $x \in \mathbf{R}^n$ *tels que* $\|x\| < 1$, $\bar{B}$ *la boule unité fermée, ensemble des* $x \in \mathbf{R}^n$ *tels que* $\|x\| \leq 1$ *et S la sphère unité, ensemble des* $x \in \mathbf{R}^n$ *tels que* $\|x\| = 1$.

Si f est une fonction dérivable en un point $x \in \mathbf{R}^n$, *à valeurs dans* $\mathbf{C}$, *on note* $df(x)$ *le vecteur de coordonnées* $(\partial f/\partial x_j(x))_{j=1,\dots,n} \in \mathbf{C}^n$; *si* Ω *est un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et* $f: \Omega \to \mathbf{C}$ *est une fonction numérique dérivable, on note* $df: \Omega \to \mathbf{C}^n$ *la fonction vectorielle* $x \to (\partial f/\partial x_j(x))_{j=1,\dots,n}$.

Le Laplacien de $\mathbf{R}^n$ *est l'opérateur différentiel* $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. *On dit qu'une fonction f de classe* C^2 *à valeurs complexes définie dans un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *est harmonique si* $\Delta f = 0$.

Le noyau de Poisson de la boule B est la fonction $k: B \times S \to \mathbf{R}$ *définie par* $k(x,y) = c\,\frac{1-x^2}{\|x-y\|^n}$ *où c est une constante non nulle qui sera précisée dans la question II.*

Si V est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ *une fonction* $f:\ V \to \mathbf{C}^m$ *est holomorphe si elle est de classe* C^1 *et si en chaque point z de V la dérivée* $f'(z)$ *(qui est a priori une application* $\mathbf{R}$*-linéaire de* $\mathbf{C}^n$ *dans* $\mathbf{C}^m$*) est* $\mathbf{C}$*-linéaire. Si g est une deuxième fonction holomorphe dans un ouvert V' contenant* $f(V)$, *le composé* $g o f$ *est holomorphe. On admettra que, comme dans le cas des fonctions holomorphes d'une variable, une fonction holomorphe dans un ouvert connexe de* $\mathbf{C}^n$, *nulle dans une partie ouverte non vide de* $\mathbf{C}^n$ *ou de* $\mathbf{R}^n$, *est identiquement nulle.*

Le thème du problème est l'étude du plus grand domaine complexe U auquel les fonctions harmoniques dans la boule B se prolongent toutes holomorphiquement.

I. Calcul différentiel élémentaire. Noyau de Poisson.

1.a. Soient f et g deux fonctions de classe C^2, à valeurs dans $\mathbf{C}$, sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$: montrer qu'on a $\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2(df)(dg) + f(\Delta g)$.

b. Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $\rho: \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2, I un ouvert de $\mathbf{R}$ contenant $\rho(\Omega)$ et g: $I \to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^2. Exprimer $\Delta(g \circ \rho)$ en fonction de $d\rho$, $\Delta\rho$, $g' \circ \rho$ et $g'' \circ \rho$.

2.a. On note r la fonction $r(x) = \|x\| : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Calculer dr et Δr pour $x \neq 0$.

b. Soit s un nombre réel. Calculer $\Delta(r^s)$ pour $x \neq 0$.

3.a. Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et f: $\Omega \to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^2. On suppose que f ne dépend que de $r = \|x\|$, ie. qu'elle est de la forme $f = g \circ r$ où g est une fonction numérique convenable. Montrer que g est de classe C^2 dans l'ouvert $r(\Omega - \{0\})$ et qu'on a, dans $\Omega - \{0\}$, $\Delta f = g'' \circ r + \frac{a_n}{r}\, g' \circ r$, où a_n est une constante qu'on déterminera.

b. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$. Déterminer toutes les fonctions f harmoniques dans Ω-{0} qui ne dépendent que de r.

c. Montrer que, si $0 \in \Omega$ et Ω est connexe, une fonction f harmonique bornée dans Ω-{0} qui ne dépend que de r est constante.

4.a. Calculer $d(1-x^2)$ et $\Delta(1-x^2)$.

b. Soit $y \in \mathbf{R}^n$. On note ρ la fonction $\rho(x) = \|x-y\|$: calculer $d(\rho^{-n})$ et $\Delta(\rho^{-n})$.

c. Montrer que le noyau de Poisson $k(x,y)$ est harmonique par rapport à x ie., que pour tout $y \in S$, on a $\Delta_x k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} = 0$.

II. Calcul intégral. Noyau de Poisson.

Dans cette partie et dans la suite on note $\int_S \varphi(y)\, d\sigma(y)$ l'intégrale d'une fonction numérique continue φ sur la sphère S, où $d\sigma(y)$ est l'élément de (n-1)-volume usuel. On admettra qu'on a $\int_S \varphi(y)\, d\sigma(y) = n \int_B \tilde{\varphi}(x)\ dx_1 \dots dx_n$ où $\tilde{\varphi}(x)$ désigne le prolongement homogène de degré 0 (ie. constant sur chaque demi-droite passant par l'origine de R^n-{0}) de φ. De façon équivalente:

$$\int_S \varphi(y)\, d\sigma(y) = \int \frac{\varphi(x_1, \dots x_{n-1}, \sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}\,) + \varphi(x_1, \dots x_{n-1}, -\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}\,)}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}}\, dx_1 \dots dx_{n-1}$$

intégrale étendue à la boule $x_1^2+\dots+x_{n-1}^2<1$ de R^{n-1}. L'intégrale $\int_S \varphi(y)\, d\sigma(y)$ est positive si φ est réelle positive; elle est invariante par isométrie: si A est une transformation linéaire isométrique de R^n on a $\int_S \varphi(Ay)\, d\sigma(y) = \int_S \varphi(y)\, d\sigma(y)$. On rappelle que le (n-1)-volume de la sphère est le nombre $c_n = \int_S d\sigma(y)$ déterminé par les relations $c_1=2$, $c_2=2\pi$, $c_{n+2}=\frac{2\pi}{n} c_n$ (on a $c_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$).

1.a. Montrer que la fonction $k_0(x) = \int_S k(x,y)\, d\sigma(y)$ est de classe C^2 dans la boule ouverte B. Montrer qu'elle est harmonique.

b. Montrer que k est invariant par isométrie (ie. $k(Ax,Ay) = k(x,y)$ si A est une isométrie linéaire de $\mathbf{R}^n$) et que $k_0(x)$ ne dépend que de $r = \|x\|$. En déduire que $k_0(x)$ est une constante non nulle.

Dans la suite du problème on choisit c de sorte qu'on ait $k_0(x) = \int_S k(x,y)d\sigma(y) = 1$.

2. Soit $g: S \to \mathbf{C}$ une fonction continue; on note F la fonction qui prolonge g sur la boule fermée $\overline{B}$ par $F(x) = \int_S k(x,y)\, g(y)\, d\sigma(y)$ si $\|x\| < 1$.

On se propose de montrer que F est un prolongement de g continu dans la boule fermée $\overline{B}$, et harmonique dans la boule ouverte B.

a. Montrer que F est harmonique dans la boule ouverte B.

b. Soit $x_0 \in S$ et $x \in B$. Montrer qu'on a $F(x) - F(x_0) = \int_S k(x,y)\,(g(y) - g(x_0))\,d\sigma(y)$.

c. Montrer que, si $x_0 \in S$, F(x) a pour limite $g(x_0)$, si $x \to x_0$ ($x \in B$), et que F est continue dans $\overline{B}$.

III. Représentation intégrale des fonctions harmoniques.

1. Soit f une fonction continue $\overline{B} \to \mathbf{R}$, telle que $f \leq 0$ sur la sphère unité S.

a. On suppose que f a des valeurs >0. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit la fonction $f + \varepsilon(x^2 - 1)$ atteint sa borne supérieure en un point de la boule ouverte B.

b. On suppose de plus f de classe C^2 dans B. Montrer qu'en un point x_0 où $f + \varepsilon(x^2 - 1)$ atteint une borne supérieure strictement positive on a $\Delta f < 0$.

c. Montrer que si f est continue dans $\overline{B}$, que f est de classe C^2 dans la boule ouverte B et $\Delta f \geq 0$ dans la boule ouverte B, on a $f \leq 0$ dans $\overline{B}$.

d. Montrer de même que si f est continue dans la boule $\overline{B}$ et harmonique dans la boule ouverte B, f atteint ses bornes sur le bord (ie. sur la sphère S). En particulier $f = 0$ si f est nulle sur S.

2. Soit f une fonction continue $\overline{B} \to \mathbf{C}$, harmonique dans la boule ouverte B. Montrer qu'on a, pour tout $x \in B$:

(1) $$f(x) = \int_S k(x,y)\, f(y)\, d\sigma(y)$$

IV. Domaine d'existence des fonctions harmoniques.

La formule (1) montre qu'en général une fonction harmonique dans la boule B se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert de B dans $\mathbf{C}^n$. Si $V \subset \mathbf{C}^n$ est un ouvert connexe contenant B on note (P) la propriété: "toute fonction harmonique dans B se prolonge en une fonction holomorphe dans V". On se propose dans cette partie de déterminer le plus grand ouvert connexe $U \subset \mathbf{C}^n$ qui a la propriété (P).

Si $z \in \mathbf{C}^n$ on note Σ_z l'ensemble des vecteurs $y \in \mathbf{R}^n$ tels que $(z-y)^2 = 0$.

1. Soit V un ouvert connexe de $\mathbf{C}^n$ contenant B. On suppose que V a la propriété (P). Montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}^n - B$ la fonction $x \to \dfrac{1}{\|x-y\|^{n-2}}$ se prolonge holomorphiquement à V. En déduire qu'on a $(z-y)^2 \neq 0$ si $z \in V$, $y \in \mathbf{R}^n$, $\|y\| \geq 1$ si $n > 2$. Dans le cas $n = 2$ la fonction $\|x-y\|^{-n+2}$ est constante; par quoi peut-on la remplacer pour obtenir le même résultat dans ce cas?

2.a. On pose $z = x + iu$ avec x, u réels. Montrer que $\Sigma_z \subset \mathbf{R}^n$ est la sphère de centre x, de rayon $\|u\|$ du sous-espace affine orthogonal à u passant par x, ie. $\Sigma_z = \{x + v \mid \|v\| = \|u\|,\ vu = 0\}$.

b. On note U l'ensemble des $z \in \mathbf{C}^n$ tels que $(z-y)^2 \neq 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|y\| \geq 1$. Montrer qu'on a $z \in U$ si et seulement si $\Sigma_z \subset B$, et que, si $z = x + iu$ avec x, u réels, ceci équivaut à $\|x + v\| < 1$ pour tout $v \in \mathbf{R}^n$ tel que $vu = 0$, $\|v\| \leq \|u\|$.

3. Rappel: une application linéaire $A \in M_n(\mathbf{R})$ est dite antisymétrique si $Ax.x = 0$ pour tout x.

a. Soient u et v deux vecteurs réels orthogonaux ($uv = 0$). Montrer que l'application linéaire $x \to (ux)v - (vx)u$ est antisymétrique. Calculer sa norme en fonction de $\|u\|$ et $\|v\|$. (On rappelle que la norme d'une application linéaire A est le plus petit nombre réel positif c tel que $\|Ax\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$).

b. Montrer que pour $u, v \in \mathbf{R}^n$ les conditions suivantes sont équivalentes:
(i) $uv = 0$ et $\|v\| \leq \|u\|$
(ii) il existe A réelle antisymétrique de norme ≤ 1 telle que $Au = v$.

c. Montrer que U est l'ensemble des $z \in \mathbf{C}^n$ tels que pour toute application linéaire A réelle antisymétrique de norme ≤ 1 on ait $\|\mathrm{Re}[(I_n + iA)z]\| < 1$.

d. Montrer que U est convexe et ouvert.

4.a. Montrer que $(z-y)^2$ n'est jamais réel négatif si $z \in U$ et $y \in S$ (on pourra observer que si $z = x + iu \in U$ on a $x + itu \in U$ pour $-1 \leq t \leq 1$).

b. Montrer qu'il existe une unique fonction continue φ: $U \times S \to \mathbf{C}$ telle que $(\varphi(z,y))^2 = (z-y)^2$, $\varphi(x,y) = \|x-y\|$ pour x réel, $\|x\| < 1$; quel est le module de φ, quel en est l'argument?

c. Montrer que φ est holomorphe en z, non nulle dans $U \times S$, et que la fonction

$$K(z,y) = c\,\frac{1-z^2}{\varphi(z,y)^n}$$ est un prolongement holomorphe en z de k à $U \times S$.

5.a. Montrer que toute fonction continue sur la boule fermée $\overline{\mathbf{B}}$, harmonique dans la boule ouverte B se prolonge en une fonction holomorphe dans U.

b. Montrer que toute fonction harmonique dans la boule ouverte B se prolonge en une fonction holomorphe dans U, ie. que U a la propriété (P).

c. Montrer que U est le plus grand ouvert connexe contenant B dans $\mathbf{C}^n$ qui ait la propriété (P).

V. Algèbre linéaire - groupe orthogonal.

Les résultats de cette partie serviront dans la partie VI.

*Si p, q sont des entiers > 0 on note $M_{p,q}(\mathbf{C})$ l'espace des matrices à coefficients complexes à p lignes et q colonnes, et on l'identifie à l'espace des applications **C**-linéaires de $\mathbf{C}^q$ dans $\mathbf{C}^p$. On note $M_{p,q}(\mathbf{R})$ le sous espace des matrices à coefficients réels; une matrice réelle définit un opérateur **R**-linéaire: $\mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^p$ et son prolongement **C**-linéaire: $\mathbf{C}^q \to \mathbf{C}^p$. On notera aussi $M_p(\mathbf{C}) = M_{p,p}(\mathbf{C})$ (ou $M_p(\mathbf{R}) = M_{p,p}(\mathbf{R})$) l'algèbre des matrices carrées $p \times p$ et I_p l'élément unité (matrice de l'application identité).*

Sur $\mathbf{C}^{n+2}$, on note les points (Z,W) ($Z = (z_1, \ldots z_n) \in \mathbf{C}^n$, $W = (w_1, w_2) \in \mathbf{C}^2$). Pour $(Z,W) \in \mathbf{C}^{n+2}$ on pose $\lambda = w_1 + iw_2$, $\mu = w_1 - iw_2$ (on a $W^2 = \lambda\mu$). On considère les formes quadratique resp. hermitienne:

$$Q(Z,W) = W^2 - Z^2 \qquad H(Z,W) = W\overline{W} - Z\overline{Z}$$

On repère $g \in M_{n+2}(\mathbf{C})$ par une matrice par blocs: $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a \in M_n(\mathbf{C})$, $b \in M_{n,2}(\mathbf{C})$, $c \in M_{2,n}(\mathbf{C})$, $d \in M_2(\mathbf{C})$.

On note O(n) le groupe des transformations orthogonales de $\mathbf{R}^n$. On rappelle que ce groupe est compact, et que ses composantes connexes sont déterminées par le signe de $\det g$, $g \in O(n)$.

On note $\Gamma \subset M_{n+2}(\mathbf{R})$ le groupe des endomorphismes linéaires de $\mathbf{R}^{n+2}$ qui préservent la forme quadratique Q(x) ($x \in \mathbf{R}^{n+2}$). Γ opère sur $\mathbf{C}^{n+2}$ et y préserve les formes Q et H.

1.a. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{n+2}(\mathbf{R})$. On pose $g' = \begin{pmatrix} {}^t a & -{}^t c \\ -{}^t b & {}^t d \end{pmatrix}$ où ${}^t m$ désigne la transposée de m (définie par $({}^t m x)y = x(my)$ pour tous x, y). Montrer qu'on a $g \in \Gamma$ si et seulement si $g'g = I_{n+2}$ (ce qui équivaut à $gg' = I_{n+2}$). Ecrire ces conditions en fonction des matrices a, b, c, d. Montrer que a et d sont inversibles si $g \in \Gamma$.

b. Soit $g = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in M_{n+2}(\mathbf{R})$. Montrer qu'on a $g \in \Gamma$ si et seulement si $u \in O(n)$ et $v \in O(2)$.

c. Si $m \in M_p(\mathbf{R})$ on dit que m est symétrique ≥ 0 (resp. >0) si $m={}^tm$ et $(mx)x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^p$ (resp. $(mx)x>0$ pour $x \neq 0$). On note alors $\sqrt{m}$ l'unique μ symétrique ≥ 0 tel que $\mu^2=m$ (m et μ sont diagonales dans une même base orthonormale).

Soit $b \in M_{n,2}(\mathbf{R})$. On pose $h_b=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec , $a=\sqrt{1+b{}^tb}$, $c={}^tb$, $d=\sqrt{1+{}^tbb}$. Montrer qu'on a $h_b \in \Gamma$.

d. Soit $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Montrer qu'il existe $u \in O(n)$, $v \in O(2)$ et $\beta \in M_{n,2}(\mathbf{R})$ tels que $g=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} h_\beta$. On pourra d'abord examiner le cas où a et d sont symétriques et positives.

2.a. Soit (Z,W) tel que $Q(Z,W)=0$, $H(Z,W)>0$. Montrer qu'on a ou bien $|\mu| \leq \|Z\| < |\lambda|$, ou bien $|\lambda| \leq \|Z\| < |\mu|$.

Dans la suite, on note Ω l'ensemble des $(Z,W) \in C^n \times C^2$ tels que $Q(Z,W)=0$, $H(Z,W)>0$, $|\mu|<|\lambda|$, et $G \subset \Gamma$ le sous groupe des $g \in \Gamma$ tels que $g\,\Omega=\Omega$.

b. Soit $g=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in \Gamma$, avec $u \in O(n)$ et $v \in O(2)$. Montrer qu'on a $g \in G$ si et seulement si $\det v>0$.

c. Soit $b \in M_{n,2}(\mathbf{R})$. Montrer que la matrice $h_{t\,b}$, $t \in \mathbf{R}$, dépend continûment de t. Montrer qu'on a $h_b \in G$.

d. Montrer que G est le sous-groupe de Γ formé des $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tels que $\det d>0$.

VI. Equation et groupe d'automorphismes de U.

On reprend les notations de IV et V. On note p l'application $(Z,W) \to \frac{Z}{\lambda} \in C^n$ (avec $\lambda=w_1+iw_2$, $W=(w_1,w_2)$ comme dans V; p est définie dans l'ouvert $\lambda \neq 0$ de C^{n+2}).

1.a. Soit $z \in \mathbf{C}^n$ et soit $E \subset \mathbf{R}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension 2 contenant Re z et Im z. Montrer que sur Σ_z la fonction $y \to \|y\|^2$ atteint ses bornes dans $E \cap \Sigma_z$.

b. Soit $E \subset \mathbf{R}^n$ un sous espace vectoriel de dimension 2 et (e,f) une base orthonormale de E. Pour $z=ae+bf \in \mathbf{C}^n$ avec $a,b \in \mathbf{C}$, on pose $\alpha(z)=a+ib=\alpha$, $\beta(z)=a-ib=\beta$. Calculer z^2 et $z\bar{z}$ en fonction de α, $\bar{\alpha}$, β, $\bar{\beta}$. Soit $y \in E$. Montrer qu'on a $(z-y)^2=0$ si et seulement si $\alpha(y)=\alpha(z)$ ou $\beta(y)=\beta(z)$. Montrer qu'on a alors $z \in U$ si et seulement si $|\alpha(z)|<1$ et $|\beta(z)|<1$.

c. Soit $z \in \mathbf{C}^n$. Montrer qu'on a $z \in U$ si et seulement si $1-2z\bar{z}+z^2\bar{z}^2>0$ et $z\bar{z}<1$.

2.a. Montrer que p est une surjection de Ω sur U, et qu'on a $p(Z,W)=p(Z',W')$ si et seulement si (Z,W) et (Z',W') sont proportionnels.

b. Soit $g \in G$. Montrer que $p(g(Z,W))$ ne dépend que de $p(Z,W)$.

L'action de G sur Ω passe au quotient et définit une action de G sur U. Si $g \in G$, et $z \in U$ on notera $\tilde{g}(z)$ le résultat ($\tilde{g}(z)=p(g(Z,W))$ si $z=p(Z,W)$) et on dira qu'un automorphisme a de U provient de G s'il est de la forme $z \to \tilde{g}(z)$ pour un $g \in G$ (g est alors bien déterminé, au signe près).

c. Montrer que si $\theta \in \mathbf{R}$, l'application $z \to e^{i\theta} z$ est un automorphisme de U qui provient de G.

On se propose de montrer que tout automorphisme holomorphe de U provient de G (ie que si a est une bijection holomorphe $U \to U$ il existe $g \in G$ tel que $a(z) = \tilde{g}(z)$).

3. Soit $z \in U$. Montrer qu'on peut choisir $(Z,W) \in \Omega$, $Z = X + iY$, $W = U + iV$ avec X, Y, U, V réels de sorte que $p(Z,W) = z$, que $Z^2 = W^2$ soit réel, et $U^2 - X^2 = V^2 - Y^2 = 1$.
On pose alors $e = U/\|U\|$, $f = V/\|V\|$; on note $b \in M_{n,2}(\mathbf{R})$ l'opérateur linéaire tel que $b(e) = X$, $b(f) = Y$ et h_b l'opérateur défini dans la question V.1.c. Calculer $h_b(0, e+if) \in \mathbf{C}^{n+2}$. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\tilde{g}(0) = z$. Montrer que G opère transitivement sur U (ie. pour tous $z, z' \in U$ il existe $g \in G$ tel que $z' = \tilde{g}(z)$).

4. Soit a un automorphisme linéaire de U (ie. $a \in GL(n,\mathbf{C}) \subset M_n(\mathbf{C})$ et $aU = U$). On se propose de montrer que a provient de G.

a. On pose $P(z) = 1 - 2z\bar{z} + z^2\bar{z}^2$ (P est un polynôme de z et $\bar{z}$) et $P_a(z) = P(a(z))$. Montrer qu'on a $P_a(z) = 0$ si $P(z) = 0$, $\|z\| \le 1$.

b. Soit $\varepsilon \in \mathbf{C}^n$ un vecteur isotrope (ie. $\varepsilon^2 = 0$) tel que $\varepsilon\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}$ ($\varepsilon = \frac{e-if}{2}$ avec $e, f \in S$, $ef = 0$). Vérifier qu'on a $P(\lambda\varepsilon + \mu\bar{\varepsilon}) = (1 - \lambda\bar{\lambda})(1 - \mu\bar{\mu})$, et $P_a(\lambda\varepsilon + \mu\bar{\varepsilon}) = 0$ si $|\lambda| = 1$, $|\mu| < 1$ ou $|\mu| = 1$, $|\lambda| < 1$. Montrer que le polynôme $P_a(\lambda\varepsilon + \mu\bar{\varepsilon})$ de $\lambda, \bar{\lambda}, \mu, \bar{\mu}$ est identique à $(1 - \lambda\bar{\lambda})(1 - \mu\bar{\mu})$.

c. Montrer qu'on a $P_a = P$. En déduire que a est unitaire ($\|a(z)\| = \|z\|$) et qu'il existe un nombre complexe γ tel que $(a(z))^2 = \gamma z^2$.

d. Déduire de ce qui précède qu'il existe un nombre réel θ et $u \in O(n)$ tels que $a(z) = e^{i\theta} u(z)$, et qu'il existe $g \in G$ tel que $a(z) = \tilde{g}(z)$.

5. On se propose de montrer que tout automorphisme holomorphe de U provient de G. Soit a un automorphisme holomorphe de U.

a. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\tilde{g}(a(0)) = 0$.

On suppose désormais $a(0) = 0$.

b. On pose $p_U(z) = \inf\{r \mid r \ge 0,\ z \in rU\}$. Montrer que p_U est une norme d'espace vectoriel complexe, c'est à dire $p_U(\lambda z) = |\lambda| p_U(z)$ si $\lambda \in \mathbf{C}$, $p_U(z+z') \le p_U(z) + p_U(z')$, et $p_U(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$, si $z, z' \in \mathbf{C}^n$.

c. On pose $\psi(t,z) = a_t(z) = \dfrac{a(tz)}{t}$ qu'on prolonge par $\psi(0,z) = \lim\limits_{t \to 0} \psi(t,z)$ pour $t = 0$; montrer que pour z fixé, $p_U(z) = 1$, $t \to \psi(t,z)$ est holomorphe pour $|t| < 1$ et qu'on a $p_U(\psi(t,z)) \le 1$. Montrer qu'on a $p_U(\psi(t,z)) = 1$ (appliquer ce qui précède à a^{-1}). En déduire qu'on a $a(tU) = ta(U)$ si $|t| < 1$, et à la limite que $z \to \psi(0,z) = a_0(z) = a'(0)(z)$ est un automorphisme linéaire de U.

d. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\tilde{g}(a(0)) = 0$ et $(\tilde{g} \circ a)'(0) = \mathrm{Id}$.

e. On suppose $a(0)=0$ et $a'(0)=\mathrm{Id}$. Soit $x\in S$. Avec les notations ci-dessus montrer qu'on a $\|\psi(t,x)\|\leq 1$ si $|t|<1$ et $\psi(0,x)=x$, et que ceci implique $a(tx)=tx$ si $|t|<1$. En déduire qu'on a $a=\mathrm{Id}$.

f. Montrer que tout automorphisme de U provient de G.

Index des notations