concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition de mathématiques générales

Durée : 6 heures

Plusieurs définitions ou notations, imprimées en italiques, sont introduites au fur et à mesure dans l'énoncé du problème.

La lettre k désigne un corps commutatif **infini** et la lettre G un groupe. Les termes "espace vectoriel", "application linéaire" et "forme linéaire" signifient respectivement "k-espace vectoriel", "application k-linéaire" et "forme k-linéaire". Si V est un espace vectoriel, le groupe des automorphismes de V (c'est à dire des applications linéaires de V dans lui même qui sont des bijections) sera noté $GL(V)$.

Def 1- *Une action de G sur un espace vectoriel V est par convention la donnée d'un morphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$. On dit aussi que G agit sur V. On notera souvent, pour $g \in G$ et $v \in V$, $g.v$ au lieu de $\rho(g)(v)$. Il faut noter qu'avec cette convention une action est* **toujours linéaire** *: $g.(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 g.v_1 + \lambda_2 g.v_2$. Pour connaitre une action ρ de G sur V, il suffit donc de savoir, pour tout élément g de G, quelle est l'image par $\rho(g)$ des éléments d'une base de V.*

Def 2- *Un* **invariant** *pour l'action de G sur V est un élément v de V tel que, pour tout $g \in G$, on ait $g.v = v$. Les invariants forment un sous-espace vectoriel de V* **que l'on notera** V^G.

Def 3- *Si $S = k[X_1, \ldots, X_n]$ désigne l'algèbre des polynômes à n indéterminées, à coefficients dans k, on notera S_d le sous-espace vectoriel de S constitué du polynôme nul et des polynômes homogènes de degré d. Tout polynôme P de S permet de définir une fonction de k^n dans k que l'on appelle la fonction associée à P.*

0-1- *Soit E un ensemble. On note $F(E)$ l'ensemble des fonctions de E dans k. On peut additionner deux éléments f_1 et f_2 de $F(E)$ en posant, pour $e \in E, (f_1 + f_2)(e) = f_1(e) + f_2(e)$. On peut aussi multiplier f_1 par un scalaire $\lambda \in k$ en posant $(\lambda f_1)(e) = \lambda f_1(e)$. Muni de ces deux lois, $F(E)$ est un espace vectoriel.*

PARTIE I —PRÉLIMINAIRES—

Soit n un entier non nul.

1-1- Pour tout entier i entre 1 et n, on se donne une partie **infinie** A_i de k. Soit $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. On suppose que la restriction à $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ de la fonction associée à P est identiquement nulle. Montrer que P est le polynôme nul.

1-2- On suppose ici que $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit U un ouvert non vide de k^n (pour la topologie usuelle d'espace vectoriel de dimension finie) et $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. On suppose que la restriction à U de la fonction associée à P est identiquement nulle. Montrer que P est le polynôme nul.

1-3- On choisit une action d'un groupe G sur un espace vectoriel V. Soit $g \in G, f \in F(V)$ (cf 0-1) et $v \in V$. On définit $g.f \in F(V)$ par $(g.f)(v) = f(g^{-1}.v)$.

1-3-1- Montrer que l'on a bien défini ainsi une action de G sur l'espace vectoriel $F(V)$.

1-3-2- Soit $v \in V$ et $\mathcal{O}_v = \{g.v | g \in G\}$ sa G-orbite. Soit $h \in F(V)^G$ un invariant. Montrer que h est constant sur $\mathcal{O}_v$. Si une fonction $f \in F(V)$ est constante sur toutes les G-orbites, est-elle dans $F(V)^G$?

1-4- Soit r un entier strictement positif. On suppose que k est de caractéristique nulle ou de caractéristique ne divisant pas r. On suppose aussi que k contient une racine primitive r-ième de l'unité ω. On note $G = \mu_r$ le groupe des racines r-ièmes de l'unité dans k constitué des puissances de ω. On fait agir G sur $k[X]$ via $\rho(\omega)(X^n) = \omega^n X^n$.

1-4-1- Montrer que pour tout g dans G et pour tout P et Q dans $k[X]$, on a $\rho(g)(P.Q) = \rho(g)(P).\rho(g)(Q)$.

1-4-2- Montrer que $k[X]^G = k[X^r]$ où $k[X^r]$ est l'ensemble des polynômes de la forme $P(X^r)$ pour P un polynôme.

1-5- Soit $G = Gl_n(k)$. $Gl_n(k)$ désigne l'ensemble des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients dans k. Il agit sur k^n par multiplication d'une matrice A de G par un vecteur colonne v de k^n.

1-5-1- Soit $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. On notera aussi $P \in F(k^n)$ la fonction associée. Montrer que pour tout $g \in G, g.P$ est encore une fonction associée à un polynôme de $k[X_1, \ldots, X_n]$ (cf 1-3 pour la définition de $g.P$).

1-5-2- Soit v non nul dans k^n. Quelle est son orbite par $G = Gl_n(k)$?

1-5-3- Montrer que les seules fonctions de $F(k^n)$, associées à des polynômes et invariantes par $G = Gl_n(k)$, sont les constantes.

PARTIE II — POLYNÔMES ET ACTIONS SUR DES ALGÈBRES—

Def 4- *Une algèbre est un k-espace vectoriel A, muni d'une loi de composition interne, appelée le produit, qui à (a_1, a_2) dans A^2 associe $a_1 a_2$ dans A et qui vérifie :*

a) $(A, +, .)$ est un anneau **commutatif et unitaire**. *L'élément neutre multiplicatif sera noté 1_A (ou simplement 1 si aucune confusion n'en résulte).*

b) Pour tout $(a_1, a_2) \in A^2$ et $\lambda \in k$, on a $\lambda(a_1 a_2) = (\lambda a_1) a_2 = a_1(\lambda a_2)$.

Une sous-algèbre d'une algèbre est un sous ensemble qui est à la fois un sous espace vectoriel et un sous-anneau unitaire. Soit E un ensemble. L'espace vectoriel $F(E)$ des fonctions de E dans k est aussi une algèbre. Le produit y est défini par $(f_1 f_2)(e) = f_1(e) f_2(e)$. L'unité est la fonction constante qui à tout élément de E associe $1 \in k$.

Def 5- *Un morphisme d'algèbres d'une algèbre A dans une algèbre B est une application α de A dans B qui est simultanément un morphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux unitaires. En particulier il envoie 1_A sur 1_B et satisfait, pour tout $(a_1, a_2) \in A^2$, à $\alpha(a_1 a_2) = \alpha(a_1)\alpha(a_2)$. Un automorphisme de l'algèbre A est un morphisme d'algèbres de A dans A qui est bijectif. L'inverse est alors aussi un morphisme d'algèbres. L'ensemble des automorphismes d'algèbre de A forme un groupe pour la composition, appelé groupe des automorphismes de l'algèbre A.*

Def 6- *Une action d'un groupe G sur une algèbre A est la donnée d'un morphisme de groupes de G vers le groupe des automorphismes de l'algèbre A. Autrement dit, il s'agit d'un morphisme ρ de G vers le groupe des automorphismes de k-espace vectoriel de A, satisfaisant en outre à $\rho(g)(a_1 a_2) = \rho(g)(a_1)\rho(g)(a_2)$ et $\rho(g)(1) = 1$ pour tout $g \in G, a_1 \in A$ et $a_2 \in A$. L'ensemble A^G des invariants (au sens de la définition 2) forme alors une sous-algèbre de A.*

Def 7- *Si A est une algèbre et $f_1, \dots, f_n$ des éléments de A, on note $k[f_1, \dots, f_n]$ l'image du morphisme d'algèbres $\pi : k[X_1, \dots, X_n] \to A$ qui est défini par $\pi(X_i) = f_i$. On dit que $k[f_1, \dots, f_n]$ est engendrée par les n éléments $f_1, \dots, f_n$.*

Def 8- *Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V supposé ici de dimension finie. On notera $X_1^0, ..., X_n^0$ la base duale : $X_i^0(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_i$. Soit $F(V)$ l'algèbre de toutes les fonctions de V dans k. Les éléments X_i^0 engendrent une sous-algèbre de l'algèbre $F(V)$,* **que l'on notera** *$S(V)$. Les éléments de $S(V) = k[X_1^0, \dots, X_n^0]$ sont appelés les* **fonctions polynômes** *de V.*

2-1- On reprend ici les notations de la définition 8. A priori, la sous-algèbre $S(V)$ de $F(V)$ introduite dans cette définition dépend du choix d'une base de V.

2-1-1 Montrer que la sous-algèbre $S(V)$ est indépendante du choix de la base de V.

2-1-2 Montrer que le morphisme d'algèbres qui à X_i associe X_i^0 est un isomorphisme de l'algèbre $S = k[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes à n indéterminées vers l'algèbre $S(V)$.

2-1-3-On note $S(V)_d$ l'image de S_d par l'isomorphisme de 2-1-2. Montrer que $S(V)_d$ ne dépend pas du choix de la base de V.

Dorénavant, dès qu'une base de V est choisie, on identifiera $S(V)$ et $S = k[X_1, \dots, X_n]$ et on notera X_i pour X_i^0.

2-2- On se place dans la situation de 1-3.

2-2-1- Montrer que l'action ρ de G sur l'espace vectoriel $F(V)$, action définie en 1-3, est en fait aussi une action de G sur **l'algèbre** $F(V)$.

2-2-2- Montrer que, pour tout $d \geq 0$, $S(V)_d$ est stable pour cette action, c'est à dire que pour tout $g \in G$, $\rho(g)(S(V)_d)$ est inclus dans $S(V)_d$.

2-2-3- Prouver que

$$S(V)^G = \bigoplus_{d \geq 0} (S(V)^G \cap S(V)_d).$$

PARTIE III— EXEMPLES—

3—GROUPE SPÉCIAL LINÉAIRE—

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n et r un entier strictement positif. On suppose que k est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Le groupe des automorphismes de V est noté $GL(V)$.

$$\text{Soit } G = SL(V) = \{g \in GL(V) \mid \det g = 1\}.$$

Ce groupe agit sur V^r de la façon diagonale suivante :

$$g.(v_1, \dots, v_r) = (g(v_1), \dots, g(v_r)).$$

Soit U_r le sous ensemble suivant de V^r :

$$\{(v_1, \dots, v_r) \in V^r \mid \text{la famille } v_1, \dots, v_r \text{ est linéairement indépendante dans } V\}.$$

3-1- Montrer que U_r est un ouvert de V^r.

3-2- Montrer que pour $r < n$, U_r est une orbite de G . En déduire que alors $S(V^r)^G = k$.

3-3- On suppose que $r = n$. On fixe une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de V. Soit $f(v_1, \dots, v_n) = \det_e(v_1, \dots, v_n)$, le déterminant des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ dans la base e.

3-3-1- Montrer que $f \in S(V^n)^G$.

3-3-2- Montrer que tout élément de U_n a dans son orbite sous G un élément unique de la forme $(e_1, \dots, e_{n-1}, \alpha e_n)$ pour un élément $\alpha \in k$ que l'on calculera. En déduire que $S(V^n)^G = k[f]$.

4 — QUELQUES GROUPES FINIS—

Def 9- *Soit A une algèbre. On dit que A est une algèbre de polynômes s'il existe $n \in \mathbf{N}, f_1 \in A, \dots, f_n \in A$, tels que le morphisme d'algèbres $\pi : k[X_1, \dots, X_n] \to A$ qui est défini par $\pi(X_i) = f_i$ soit un isomorphisme.*

4-1- Soit $G = \mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ des n premiers entiers non nuls. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_n$, on pose $\pi(X_i) = X_{\pi(i)}$, ce qui permet de définir une action de G sur l'algèbre $k[X_1, \dots, X_n]$. Quelle est l'algèbre $k[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$? Est-ce que cette algèbre est une algèbre de polynômes ?

4-2- Soit $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On note 1 et ε les éléments de G et on suppose ici que la caractéristique de k est différente de 2. On fait agir G sur l'algèbre $k[X_1, \dots, X_n]$ par $\varepsilon.X_j = -X_j$.

4-2-1- Montrer que $k[X_1, \dots, X_n]^G = k[X_1^2, \dots, X_iX_j, \dots, X_n^2]$.

4-2-2- Montrer que pour $n \geq 2, k[X_1, \dots, X_n]^G$ n'est pas un anneau factoriel. Pour quelles valeurs de n, $k[X_1, \dots, X_n]^G$ est une algèbre de polynômes ?

4-2-3- Montrer que si P est un polynôme de $k[U, V, W]$ tel que $P(X^2, XY, Y^2)$ est nul dans $k[X, Y]$, alors P est divisible par $V^2 - UW$.

Indication : On pourra utiliser sans la prouver la version suivante de la division euclidienne : si D est un anneau commutatif unitaire et intègre, si A et B sont deux polynômes de $D[V]$, avec B non nul et **unitaire**, il existe Q et R dans $D[V]$ tels que $A = BQ + R$ et, soit $R = 0$, soit $degR < degB$.

4-2-4- Montrer que $k[X^2, XY, Y^2]$ est isomorphe à $k[U, V, W]/(V^2 - UW)$.

5 et 6—GROUPE ORTHOGONAL—

Dans 5 et 6, le corps k est le corps des réels.

5- Soit V un espace vectoriel de dimension finie n muni d'un produit scalaire et $O(V)$ le groupe orthogonal correspondant. Il agit naturellement sur V. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de V. On en déduit une identification entre $S(V)$ et $k[X_1, \dots, X_n]$.

5-1- Montrer que tout élément v de V a dans son orbite sous $O(V)$ un unique élément ae_1 où a est un réel positif ou nul que l'on déterminera.

5-2- En déduire que $S(V)^{O(V)} = \mathbf{R}[X_1^2 + \dots + X_n^2]$.

6- Soit $E = \mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire usuel : si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ sont deux éléments de E, $x.y = x_1x_2 + y_1y_2$. On note $e = (e_1, e_2)$ la base canonique (donc orthonormée) de E. Soit $V = E^2 = \mathbf{R}^4$,lui aussi muni de sa base canonique, et $G = O(2)$ le groupe orthogonal de E. On fait agir G sur V de façon diagonale par $g.(x, y) = (g(x), g(y))$. Soit $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = F(x, y)$ une fonction polynôme de V qui soit G-invariante.

6-1- Soit $H \in \mathbf{R}[X_1, X_2, X_3]$. Soit $L \in \mathbf{R}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ défini par $L(x_1, x_2, y_1, y_2) = H(x_1y_1 + x_2y_2, x_1^2 + x_2^2, y_1^2 + y_2^2) = H(x.y, x.x, y.y)$. Montrer que L est G-invariant.

6-2- On pose, pour tout $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3, K(a, b, c) = F(a, 0, b, c)$. Montrer que K est un polynôme en a^2, b^2, c^2, ab.

Indication : Utiliser des éléments convenables de G, notamment la symétrie orthogonale d'axe $\mathbf{R}e_1$ et 4-2-1.

6-3- Montrer que tout élément (x, y) de V a dans son orbite sous G un élément (u, v) où u est proportionnel à e_1. En déduire qu'il existe un polynôme $M \in \mathbf{R}[U, V, W]$ et un entier α positif ou nul tels que, si $x \neq 0$:

$$F(x, y) = \frac{M(x.y, x.x, y.y)}{(x.x)^{\alpha}}.$$

6-4- On se donne deux polynômes P et Q dans $\mathbf{R}[U, V, W]$. On suppose qu'il existe deux entiers positifs ou nuls p et q tels que pour tout x et y dans $E - \{0\}$ on ait :

$$(y.y)^p \; P(x.y, x.x, y.y) = (x.x)^q \; Q(x.y, x.x, y.y).$$

Montrer que les polynômes $W^p.P(U, V, W)$ et $V^q.Q(U, V, W)$ de $\mathbf{R}[U, V, W]$ sont égaux.

6-5- Montrer que :

$$\mathbf{R}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]^G = \mathbf{R}[X_1Y_1 + X_2Y_2, X_1^2 + X_2^2, Y_1^2 + Y_2^2].$$

7—CONJUGAISON—

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $V = End_{\mathbf{C}}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Soit $G = GL(E)$. On fait agir ce groupe sur V par :

$$g.a = g\,a\,g^{-1}$$

7-1- Montrer que l'ensemble U des éléments de V dont les n valeurs propres sont distinctes est un ouvert de V. Soit u un élément de U. Décrire l'orbite de u sous G.

7-2- Soit $A \in V$ et $P_A(T) = \det(T.Id - A) \in k[T]$ son polynôme caractéristique. On définit n fonctions $\tau_1, \ldots, \tau_n$ de V dans k par :

$$P_A(T) = T^n - \tau_1(A)T^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\tau_{n-1}(A)T + (-1)^n\tau_n(A).$$

Vérifier que pour tout j entre 1 et n, $\tau_j \in S(V)^G$.

7-3- Montrer que $S(V)^G = k[\tau_1, \ldots, \tau_n]$.

PARTIE IV— LES FORMES BINAIRES—

Dans cette partie G est le groupe $SL_2(k)$ des matrices 2×2, de déterminant 1, à coefficients dans un corps k **algébriquement clos de caractéristique nulle**. Il agit naturellement sur k^2 et l'on obtient grâce à 1-3 et 2-2 une action ρ sur l'algèbre $k[X, Y]$. Explicitement,

$$\text{si } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(k), \; \rho(g)(X) = \delta X - \beta Y \text{ et } \rho(g)(Y) = -\gamma X + \alpha Y.$$

On note ρ_d l'action de G dans $R_d = k[X, Y]_d$, l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d. Ceci permet de définir une action π_d de G sur $S(R_d)$, l'algèbre des fonctions polynômes sur R_d (voir 1-3 et 2-2).

8— UN EXEMPLE (d=2) —

On suppose ici que $d = 2$ et l'on rappelle que k est algébriquement clos de caractéristique nulle. Tout élément de R_2 s'écrit $uX^2 + vXY + wY^2$ d'où une identification de $S(R_2)$ et de $k[u, v, w]$.

8-1- Si $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(k)$, montrer que $(\pi_2(g)P)(u,v,w)$ est la fonction :

$$P(\alpha^2 u + \alpha\gamma v + \gamma^2 w, 2\alpha\beta u + (\alpha\delta + \beta\gamma)v + 2\gamma\delta w, \beta^2 u + \beta\delta v + \delta^2 w).$$

En déduire que le polynôme $\Delta(u,v,w) = v^2 - 4uw$ appartient à $S(R_2)^G$.

8-2- Montrer que pour tout choix de $(u,v,w) \in k^3$ tel que $u \neq 0$, il existe $g \in G$ tel que $\pi_2(g)(uX^2 + vXY + wY^2) = X^2 - \dfrac{\Delta(u,v,w)}{4}Y^2$. En déduire que $S(R_2)^G = k[\Delta]$.

9— CAS GÉNÉRAL—

L'action π_d de G sur $S(R_d)$ laisse stable chaque sous-espace vectoriel $S(R_d)_e$ ($e \geq 0$), et définit une action de G sur $S(R_d)_e$ que l'on notera $\pi_{d,e}$. **Soit $m(d,e)$ la dimension sur k de l'espace vectoriel des invariants de cette dernière action $\pi_{d,e}$.** Le but de cette partie est de donner une formule permettant le calcul de $m(d,e)$. On rappelle que ρ_d est défini au début de la partie IV.

Soit $a \in k$. Si a est non nul, on note g_a l'élément $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ de $SL_2(k)$.

9-1- Ecrire la matrice de $\rho_d(g_a)$ dans la base $(X^d, X^{d-1}Y, \ldots, Y^d)$ de R_d et montrer que la trace de $\rho_d(g_a)$ vaut $\dfrac{a^{d+1} - a^{-(d+1)}}{a - a^{-1}}$.

9-2 Montrer que $(R_0)^G = k$ et que, pour $d > 0$, $(R_d)^G = 0$.

Def 11- *Soit H un groupe et $h \in H$. Soit I un ensemble fini d'indices et $(\pi_i)_{i \in I}$ une famille d'actions de H sur des espaces vectoriels de dimension finie V_i. La somme directe des π_i, notée $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$, est l'action de H sur $\bigoplus_{i \in I} V_i$ définie par $\pi(h)((v_i)_{i \in I}) = (\pi_i(h)(v_i))_{i \in I}$.* En particulier, si ρ est une action de H sur V, on définit pour $k \in \mathbf{N}$ une action ρ^k de H sur V^k par $\rho^k(h)(v_1, \ldots, v_k) = (\rho(h)(v_1), \ldots, \rho(h)(v_k))$.

9-3- On utilise les notations de la définition 11. Montrer que la trace de $\pi(h)$ vaut la somme, sur l'ensemble I, des traces de $\pi_i(h)$.

9-4- On **admet** que pour toute action λ de $G = SL_2(k)$ dans un espace vectoriel V de dimension finie, il existe, pour tout entier $d \geq 0$, un entier $n(d)$ tel que :

a) $n(d)$ est nul sauf pour un nombre fini de valeurs de d.

b) il existe un isomorphisme θ entre $\bigoplus_{d \geq 0} R_d^{n(d)}$ et V.

et c) pour tout $g \in G$, $\bigoplus_{d \geq 0} \rho_d^{n(d)}(g) = \theta^{-1} \circ \lambda(g) \circ \theta$.

9-4-1- Montrer que la trace de $\lambda(g_a)$ vaut alors $\displaystyle\sum_{d \geq 0} n(d) \frac{a^{d+1} - a^{-(d+1)}}{a - a^{-1}}$.

9-4-2- En déduire que les entiers $n(d)$ sont uniquement déterminés par λ.

9-4-3- On rappelle qu'un polynôme de Laurent est un élément de $k[a, a^{-1}]$. Montrer que $\dim_k(V^G)$ est le coefficient de a dans le polynôme de Laurent $\left[(a - a^{-1})\,\mathrm{Trace}(\lambda(g_a))\right]$.

9-5- Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ une matrice inversible. On lui associe un automorphisme, toujours noté B, de l'algèbre $k[X_1, \ldots, X_n]$ défini par :

$$(B.P)(x_1, \ldots, x_n) = P(B^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}).$$

Soit $tr_e(B)$ la trace de la restriction de cet automorphisme à l'espace vectoriel $k[X_1,\dots,X_n]_e$. On note $\mathbf{1_n}$ la matrice identité de taille $n \times n$. Enfin $k[[T]]$ représente l'algèbre des séries formelles en l'indéterminée T à coefficients dans k .

9-5-1- On considère le polynôme en T suivant : $\det(\mathbf{1}_n - B^{-1}T)$. Montrer que ce polynôme a un inverse dans l'algèbre des séries formelles $k[[T]]$. On notera dans la suite cet inverse $(\det(\mathbf{1}_n - B^{-1}T))^{-1}$.

9-5-2- Montrer que si B est triangulaire supérieure (c'est à dire $b_{i,j} = 0$ si $i > j$), les séries formelles, $\sum_{e\geq 0} tr_e(B)\, T^e$ et $(\det(\mathbf{1}_n - B^{-1}T))^{-1}$, sont égales dans $k[[T]]$.

9-5-3- Montrer que l'égalité de 9-5-2 est encore valable que B soit triangulaire ou pas.
Indication : On pourra utiliser la question 2-1.

9-6- Soit $\chi_{d,e}(a)$ la trace de $\pi_{d,e}(g_a)$. Montrer que :

$$\sum_{e\geq 0} \chi_{d,e}(a)\, T^e = \Big[(1 - a^{-d}\, T)(1 - a^{-d+2}\, T)\dots(1 - a^d\, T)\Big]^{-1}$$

9-7- Soit $\mathbf{Z}[U][[W]]$ l'anneau des séries formelles en l'indéterminée W à coefficients dans $\mathbf{Z}[U]$. Soit $F_U(W)$ l'élément de cet anneau défini par

$$F_U(W) = (1 - W)(1 - U\, W)\dots(1 - U^d W).$$

Montrer qu'il existe des polynômes $M_{d,e}(U) \in \mathbf{Z}[U]$ tels que

$$[F_U(W)]^{-1} = \sum_{e\geq 0} M_{d,e}(U)\, W^e.$$

On définit les entiers $c(d,e,i)$ par $M_{d,e}(U) = \sum_{i\geq 0} c(d,e,i)U^i$.

9-8- Montrer que $\chi_{d,e}(a) = a^{-de} M_{d,e}(a^2)$.

9-9- On rappelle que, par définition, $m(d,e)$ est la dimension sur k de $S(R_d)^G_e$. Prouver que $m(d,e) = 0$ si de est impair et que si de est pair :

$$m(d,e) = c(d,e,de/2) - c(d,e,(de/2) - 1).$$

PARTIE V—GROUPE SYMÉTRIQUE—

Dans toute la partie V, et donc jusqu'à la fin du problème, le corps k sera supposé de caractéristique nulle.

10—POLARISATION—

Soit B une algèbre. Soit $f(U_1,\dots,U_n)$ un polynôme en les n indéterminées à coefficients dans B. On définit un polynôme $D_{U,Y}$ en les $2n$ indéterminées $(U_1,\dots,U_n,Y_1,\dots,Y_n)$ par

$$D_{U,Y} f(U_1,\dots,U_n,Y_1,\dots,Y_n) = Y_1\frac{\partial f}{\partial U_1} + \dots + Y_n\frac{\partial f}{\partial U_n}.$$

Pour simplifier l'écriture on posera $U = (U_1,\dots,U_n)$, $Y = (Y_1,\dots,Y_n)$ et on notera $B[U]$ pour $B[U_1,\dots,U_n]$ et $B[U,Y]$ pour $B[U_1,\dots,U_n,Y_1,\dots,Y_n]$.

On rappelle qu'une application D de $B[U]$ vers $B[U,Y]$ est une dérivation si elle est B-linéaire (c'est à dire si $D(b_1P_1+b_2P_2) = b_1D(P_1)+b_2D(P_2)$ pour tout $(b_1,b_2) \in B^2$ et $(P_1,P_2) \in B[U]^2$) et si elle satisfait à $D(PQ) = PD(Q)+QD(P)$ pour tout P et Q dans $B[U]$.

10-1- On suppose ici que $k = \mathbf{R}$. On considère l'application λ de $\mathbf{R}$ dans $B[U,Y]$ donnée par

$$t \mapsto f(U_1+tY_1, U_2+tY_2, \dots, U_n+tY_n) = \lambda(t).$$

Montrer que $D_{U,Y}f = \lambda'(0)$. En déduire que l'application qui à f associe $D_{U,Y}f$ est une dérivation de $B[U]$ dans $B[U,Y]$.

On admet dans la suite que ce résultat est vrai pour tout corps k.

10-2- Montrer que si on se donne p éléments $h_1,\dots,h_p$ de $B[U]$ et si f appartient à $B[h_1,\dots,h_p]$, alors $D_{U,Y}f$ est un élément de $B[h_1,\dots,h_p,D_{U,Y}h_1,\dots,D_{U,Y}h_p]$.

10-3- On suppose qu'un groupe G agit sur $V = k^n$ donc aussi (cf 1-3 et 2-2) sur $S(V) = k[U]$. On le fait agir sur V^2 par

$$g.(u_1,\dots,u_n,y_1,\dots,y_n) = (g.(u_1,\dots,u_n), g.(y_1,\dots,y_n)).$$

Ceci permet de définir une action de G sur $k[U,Y]$. Montrer que si $f \in k[U]$ est invariant pour l'action de G sur $k[U]$, alors $D_{U,Y}f$ est invariant pour l'action de G sur $k[U,Y]$.

10-4- Soit f un polynôme non nul de $k[U]_r$, c'est à dire un polynôme homogène de degré r. Pour tout entier $p \geq 1$, on se donne n indéterminées $U_1^{[p]},\dots,U_n^{[p]}$. On pose $U^{[p]} = (U_1^{[p]},\dots,U_n^{[p]})$ et on identifie $U^{[1]}$ et U. Soit $N \geq 1$ un entier. On définit un polynôme $\widehat{f}_N$ en les $N.n$ indéterminées $(U_j^{[i]})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq n}$ par :

$$\widehat{f}_N = f \text{ si } N = 1$$

$$\widehat{f}_N(U^{[1]},\dots,U^{[N]}) = D_{U,U^{[N]}}D_{U,U^{[N-1]}}\dots D_{U,U^{[2]}}f \text{ si } N \geq 2.$$

On notera l'ordre dans lequel les indéterminées sont écrites dans ces polynômes. Pour $N = r$, on dit que $\widehat{f}_N = \widehat{f}_r$ est la polarisation totale de f.

10-4-1- Soit $P(U^{[1]},\dots,U^{[N]})$ un polynôme en les nN indéterminées, à coefficients dans k, homogène de degré d en les indéterminées $U^{[1]} = (U_1^{[1]},\dots,U_n^{[1]})$.
Soit $Q(U^{[1]},\dots,U^{[N]},U^{[N+1]}) = (D_{U^{[1]},U^{[N+1]}}P)(U^{[1]},\dots,U^{[N]},U^{[N+1]})$. Montrer que :

$$Q(U^{[1]},\dots,U^{[N-1]},U^{[N]},U^{[1]}) = d\; P(U^{[1]},\dots,U^{[N]}).$$

10-4-2- Montrer que pour tout p entre 1 et N, il existe une suite de r entiers $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$, avec $1 \leq \alpha_i \leq N$, telle que le polynôme $\widehat{f}_p$ soit le produit d'un élément de k et du polynôme $\widehat{f}_r(U^{[\alpha_1]},\dots,U^{[\alpha_r]})$ où $\widehat{f}_r$ est la polarisation totale de f.

11—ACTION DIAGONALE DU GROUPE SYMÉTRIQUE—

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sera noté G dans cette partie. Il agit sur l'algèbre des polynômes en les $n.N$ indéterminées $A = k[U_j^{[i]}]_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq n}$ par :

$$\pi.(U_j^{[i]}) = U_{\pi(j)}^{[i]}.$$

11-1- Soient $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ les fonctions symétriques élémentaires en les variables $U_1,\dots,U_n$. Elles sont définies par :

$$\varphi_r(U_1,\dots,U_n)=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n} U_{i_1}U_{i_2}\cdots U_{i_r}.$$

Leurs polarisations totales sont notées $\widehat{\varphi}_1,\dots,\widehat{\varphi}_n$. Montrer que :

$$\widehat{\varphi}_r(U^{[1]},\dots,U^{[r]})=\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_r)\text{ est une suite de}\\ r\text{ entiers distincts entre 1 et }n}} U^{[1]}_{i_1}\cdots U^{[r]}_{i_r}.$$

11-2- Soit M l'ensemble des $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ où $1\leq\alpha_i\leq N$ et $1\leq r\leq n$. On définit, pour $\underline{\alpha}\in M$, $\psi_{\underline{\alpha}}$ dans A par :

$$\psi_{\underline{\alpha}}(U^{[1]},\dots,U^{[i]},\dots,U^{[N]})=\frac{1}{r!}\widehat{\varphi}_r(U^{[\alpha_1]},\dots,U^{[\alpha_r]}).$$

Montrer que ces polynômes $\psi_{\underline{\alpha}}$ sont invariants par l'action de $G=\mathfrak{S}_n$ sur A.

11-3- Soient $a_1,\dots,a_N$ des entiers positifs ou nuls et $\nu=a_1+\cdots+a_N$. On définit un élément $P_{\underline{a}}$ de A par :

$$P_{\underline{a}}(U^{[1]},\dots,U^{[N]})=\sum_{1\leq j\leq n}(U^{[1]}_j)^{a_1}\cdots(U^{[N]}_j)^{a_N}.$$

Soit $\widehat{\sigma}_\nu$ la polarisation totale du polynôme de Newton σ_ν défini par :

$$\sigma_\nu(U)=\sum_{1\leq j\leq n}(U_j)^\nu.$$

Montrer qu'il existe des entiers $\beta_1,\dots,\beta_\nu$ entre 1 et N et λ dans k tels que :

$$P_{\underline{a}}(U^{[1]},\dots,U^{[N]})=\lambda\,\widehat{\sigma}_\nu(U^{[\beta_1]},\dots,U^{[\beta_\nu]}).$$

En déduire que $P_{\underline{a}}$ peut s'exprimer comme un polynôme à coefficients dans k en les $\psi_{\underline{\alpha}}$ où les indices $\underline{\alpha}$ prennent toutes les valeurs possibles dans M.

11-4- On note $\overline{\varphi}_1,\dots,\overline{\varphi}_{n-1}$ les fonctions symétriques élémentaires en les $n-1$ variables $U_2,\dots,U_n$. On pose $\overline{U}=(U_2,\dots,U_n)$. Montrer que l'on a les relations suivantes entre les $\overline{\varphi}_r$ et les φ_r :

$$\overline{\varphi}_1(\overline{U})=\varphi_1(U)-U_1,\ \text{ et pour } r \text{ entre 2 et } n-1, \overline{\varphi}_r(\overline{U})=\varphi_r(U)-U_1\overline{\varphi}_{r-1}(\overline{U}).$$

En déduire que les polarisations totales des $\overline{\varphi}_r$, que l'on notera $\widehat{\overline{\varphi}}_r$, s'expriment comme des polynômes en les $\psi_{\underline{\alpha}}$ (pour $\underline{\alpha}\in M$) avec des coefficients dans $k[U^{[1]}_1,\dots,U^{[N]}_1]$.

11-5- Montrer, par récurrence sur n, que l'algèbre $A^{\mathfrak{S}_n}$ est la k-algèbre engendrée par les polynômes $\psi_{\underline{\alpha}}$ où $\underline{\alpha}$ prend toutes les valeurs possibles dans M.

12—APPLICATION—

Soit G un groupe fini ayant n éléments et π une action de G sur $k^N = V$. On notera $g_1, \ldots, g_n$ les éléments de G. Soit u un vecteur de $V = k^N$. On notera $(u_j^{[1]}, \ldots, u_j^{[N]})$ les N coordonnées de $\pi(g_j)(u)$. Enfin si $J \in S(V) = k[U_1^{[1]}, \ldots, U_1^{[N]}]$, on définit $\widetilde{J}(U^{[1]}, \ldots, U^{[N]})$ dans $A = k[U_j^{[i]}]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq n}}$ par :

$$\widetilde{J}(U^{[1]}, \ldots, U^{[N]}) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} J(U_j^{[1]}, \ldots, U_j^{[N]}).$$

12-1- Montrer que si $J \in S(V)^G$ et si le vecteur u et les scalaires $u_j^{[i]}$ sont comme ci-dessus, alors :

$$\widetilde{J}(u_1^{[1]}, \ldots, u_j^{[i]}, \ldots, u_n^{[N]}) = J(u).$$

12-2- Montrer que $\widetilde{J} \in A^{\mathfrak{S}_n}$ (l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur A est celle de la question 11).

12-3- Soit Σ l'ensemble des suites $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ telles que

$$1 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_r \leq N \text{ et } 1 \leq r \leq n.$$

Soit γ l'application de Σ vers l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n qui à $\underline{\alpha}$ associe $\gamma(\underline{\alpha}) = X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_r}$. Etudier γ et en déduire que le cardinal de Σ est $\frac{(N+1)\cdots(N+n)}{n!} - 1$.

12-4- Montrer, en utilisant 11-5, que $S(V)^G$ est une algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments de $S(V)$. Donner un majorant de ce nombre de générateurs en fonction de n et de N.