Agrégation externe 2000

Corrigé de l'épreuve d'analyse

Transformation de Fourier; formule d'inversion et applications;
propriétés d'un exemple d'équation aux dérivées partielles.

Solution par F. SUFFRIN

Partie I

1-a $L^2 = \overline{E}$: Considérons u dans L^2. Pour répondre au problème, il suffit de traiter le cas $u \geqslant 0$.

Le théorème de convergence dominée assure la convergence dans L^2 de $(u\chi_{[-n,n]})_{n\in\mathbb{N}}$ vers u; on peut alors se ramener au cas où $u \in L^2 \cap L^1$.

De même, le théorème de convergence dominée assure la convergence vers u dans L^2 de la suite de fonctions définies pour presque tout x dans $\mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } \ u(x) \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Ceci permet de se ramener en outre au cas où l'on peut trouver $C > 0$ tel que $0 \leqslant u \leqslant C$.

Fixons un réel $\varepsilon > 0$; d'après les hypothèses, on peut trouver $v \in C_c^0$ tel que

$$\|u - v\|_{L^1} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{8C}.$$

On peut même supposer $v \geqslant 0$, puis en considérant $\min(C, v)$, se ramener à $0 \leqslant v \leqslant C$.
Cela conduit à la majoration

$$\|u - v\|_{L^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

v étant limite uniforme d'éléments de E sur son support, il existe $\varphi \in E$ tel que

$$\|v - \varphi\|_{L^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En résumé on a

$$\|u - \varphi\|_{L^2} \leqslant \varepsilon,$$

ce qui fournit le résultat.

1-b $L^2 = \overline{C_c^k}$: D'après ce qui précède, il suffit de savoir approcher dans L^2 les fonctions caractéristiques d'intervalle borné par des fonctions de C_c^k.

Ce dernier point est classique. Parmi de multiples méthodes possibles :

Il est facile d'approcher dans L^2 une fonction caractéristique d'intervalle bornée par une application continue f à support compact.
Il est alors bien connu que si $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ désigne une suite régularisante, la suite de fonctions $(f * \rho_n)_{n\geqslant 1}$ constitue une suite de fonctions de C_c^k dont chaque support est inclus dans un compact fixe K et qui converge uniformément vers f sur tout compact.
On peut supposer en outre que K contient le support de f. Alors on a

$$\|f - \rho_n * f\|_{L^2}^2 = \int_K |f - f * \rho_n|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où le résultat.

2-a $I(\alpha) = \pi|\alpha|$: Pour tout réel α, la fonction

$$x \longrightarrow \frac{1 - \cos(\alpha x)}{x^2}$$

est définie continue sur $\mathbb{R}^*$, prolongeable par continuité à l'origine par $\dfrac{\alpha^2}{2}$ et dominée en $\pm\infty$ par la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{x^2}$. Donc $I(\alpha)$ est définie pour tout réel α.

L'identité à établir est vraie à l'origine. Pour $\alpha > 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos t}{t^2} dt \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt \end{aligned}$$

c'est à dire

$$I(\alpha) = \pi\alpha.$$

Des raisons de parité conduisent au résultat souhaité.

Remarque : Il existe de multiples façons d'établir la relation

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$

Par exemple en utilisant la méthode des résidus, en intégrant $z \longrightarrow z^{-1}e^{iz}$ sur un lacet bien choisi ou en étudiant la fonction

$$x \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

2-b $\forall\, (u, v) \in E^2, (\tilde{u}|\tilde{v}) = (u|v)$: Il suffit de vérifier pour $I = [a, b]$ et $I' = [a', b']$ fixés l'égalité

$$(\widetilde{\chi_I}|\widetilde{\chi_{I'}}) = (\chi_I|\chi_{I'}) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{I\cap I'}.$$

On a pour tout réel non nul x

$$\widetilde{\chi_I}(x) = \frac{1}{2i\pi x}(e^{-2i\pi xa} - e^{-2i\pi xb}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\chi_{I'}}(x) = \frac{1}{2i\pi x}(e^{-2i\pi xa'} - e^{-2i\pi xb'});$$

on en déduit que ces fonctions sont dans L^2 puis

$$\begin{aligned} (\widetilde{\chi_I}|\widetilde{\chi_{I'}}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2i\pi x}(e^{-2i\pi xa} - e^{-2i\pi xb}) \frac{1}{2i\pi x}(e^{2i\pi xb'} - e^{2i\pi xa'})dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\pi^2x^2}(e^{2i\pi x(a'-a)} + e^{2i\pi x(b'-b)} - e^{2i\pi x(b'-a)} - e^{2i\pi x(a'-b)})dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\pi^2x^2}(\cos(2\pi x(a'-a)) + \cos(2\pi x(b'-b)) - \cos(2\pi x(b'-a)) - \cos(2\pi x(a'-b)))dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2}(I(2\pi(b'-a)) + I(2\pi(a'-b)) - I(2\pi(a'-a)) - I(2\pi(b'-b))) \\ &= \frac{1}{2}(|b'-a| + |a'-b| - |a'-a| - |b'-b|) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{I\cap I'} \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue au prix d'une petite discussion.

Le résultat annoncé en découle.

3 Existence de Θ : E est partout dense dans L^2 qui est un espace de Hilbert.

L'opérateur précédent étant une isométrie de E dans L^2, admet donc un unique prolongement continue sur L^2, assujetti à vérifier les propriétés annoncées.

4-a Existence de (u_n) et U : Considérons u dans $L^2 \cap L^1$; là encore il suffit de traiter le cas $u \geqslant 0$.

Fixons un réel $\varepsilon > 0$; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ introduite en **I-1-a** converge vers u dans L^1 et L^2.
En adaptant la suite du raisonnement, on détermine un élément v de C_c^0 tel que

$$\|u - v\|_{L^1} + \|u - v\|_{L^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

v étant limite uniforme d'éléments de E sur son support, il existe $\varphi \in E$ tel que

$$\|v - \varphi\|_{L^1} + \|v - \varphi\|_{L^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui conduit à

$$\|u-\varphi\|_{L^1}+\|u-\varphi\|_{L^2}\leqslant\varepsilon.$$

Il en résulte l'existence d'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E telle que

$$\|u-\varphi_n\|_{L^1}+\|u-\varphi_n\|_{L^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

On peut extraire de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente presque partout sur $\mathbb{R}$ vers u puis vérifiant

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, \|u_{n+1}-u_n\|_{L^1}\leqslant\frac{1}{2^n},$$

de telle façon à avoir $\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_{n+1}-u_n|$ convergente presque partout sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $U\in L^1$. Alors U est une fonction majorante intégrable de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui fournit le résultat.

4-b Expression de Θ sur $L^2\cap L^1$: Considérons u dans $L^2\cap L^1$ puis associons lui la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction U précédentes.

$\widehat{u}$ est par définition la limite dans L^2 de $(\widehat{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$; quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $(\widehat{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente presque partout sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{u}$.
Pour tout réel x, le théorème de convergence dominée donne

$$\widehat{u_n}(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{-2i\pi xy}u_n(y)dy\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{\mathbb{R}}e^{-2i\pi xy}u(y)dy$$

car les fonctions sous la première intégrale sont dominées par U.
Il en résulte pour presque tout x dans $\mathbb{R}$

$$\widehat{u}(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{-2i\pi xy}u(y)dy.$$

4-c $\forall u\in E, \widehat{\widehat{u}}(x)=u(-x)$ pp : Il suffit de le vérifier pour les fonctions caractéristiques de segments.

Considérons $I=[a,b]$; la suite $(\chi_{[-n,n]}\widehat{\chi_I})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\widehat{\chi_I}$ dans L^2 puis on peut écrire, pour presque tout $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\widehat{\chi_{[-n,n]}\widehat{\chi_I}})(x)&=\int_{-n}^{n}e^{-2i\pi xy}\widehat{\chi_I}(y)dy\\&=\int_{-n}^{n}\frac{1}{2i\pi y}(e^{-2i\pi y(x+a)}-e^{-2i\pi y(x+b)})dy\\&=\int_0^n\frac{1}{\pi y}(\sin(2\pi y(x+b))-\sin(2\pi y(x+a)))dy;\end{aligned}$$

il en résulte, pour presque tout $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty}(\widehat{\chi_{[-n,n]}\widehat{\chi_I}})(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi y}(\sin(2\pi y(x+b))-\sin(2\pi y(x+a)))dy\\&=\frac{1}{2}(\mathrm{sign}(x+b)-\mathrm{sign}(x+a))\\&=\chi_I(-x).\end{aligned}$$

La suite $(\widehat{\chi_{[-n,n]}\widehat{\chi_I}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2 vers $\widehat{\widehat{\chi_I}}$ donc admet une sous-suite qui converge presque partout sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{\widehat{\chi_I}}$. On en déduit

$$\widehat{\widehat{\chi}}_I(x)=\chi_I(-x)$$

pour presque tout x dans $\mathbb{R}$.

Formule de réciprocité de Fourier : $u\longrightarrow\widehat{\widehat{u}}$ et $u\longrightarrow u(-x)$ sont des opérateurs continues sur L^2. Ils coincident sur E qui est partout dense dans L^2 donc ils sont égaux, ce qui constitue le résultat.

Partie II

1-a Existence de u : La transformée de Fourier Θ est une isométrie sur L^2; elle est donc injective. Elle est surjective car pour $f \in L^2$, la formule de réciprocité donne $f = \widehat{g}$, où g désigne la transformée de Fourier de $f(-x)$. Alors $u(t)$ est la transformée de Fourier inverse de

$$x \longrightarrow e^{-i4\pi^2 tx^2}\widehat{u_0}(x)$$

qui est bien dans L^2 pour tout t réel puisque $u_0 \in L^2$.

Notons au passage l'unicité de u puis que la condition (1) est contenue dans (2).

1-b Détermination de J : $x \longrightarrow e^{-ix^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et une intégration par parties montre que J est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ix^2}}{2ix^2}dx;$$

cette dernière intégrale met en jeu une fonction continue sommable, d'où l'existence de J.

Pour déterminer sa valeur, on va intégrer la fonction h sur le lacet γ_R, contour du secteur angulaire

$$\left\{z = \rho e^{i\theta}; 0 \leqslant \rho \leqslant R \text{ et } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right\},$$

utilisant le théorème des résidus dont une formulation simple est :

On considère un compact K de $\mathbb{C}$ dont la frontière γ est de classe C^1, et f une fonction holomorphe sur K sauf éventuellement en un nombre fini de points $a_1, \cdots, a_n$ intérieurs à K, qui en sont des pôles. Alors on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(f, a_k),$$

$\mathrm{Res}(f,a)$ *désignant le résidu de f au pôle a.*

h étant entière, son intégrale sur γ_R orienté dans le sens direct est nulle, pour tout $R > 0$. Il en résulte

$$\int_{\gamma_R} h(z)dz = \int_0^R e^{-t^2}dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta - \int_0^R e^{-ir^2}e^{i\frac{\pi}{4}}dr = 0.$$

Pour tout $R > 0$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[$, on peut écrire

$$\left|e^{-R^2e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}\right| = e^{-R^2\cos 2\theta}R \leqslant \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

la dernière inégalité étant fournie par une simple étude de fonction.
La fonction majorante étant sommable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

On obtient donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-ir^2}e^{i\frac{\pi}{4}}dr$$

c'est à dire

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i).$$

Autre méthode : Une étude facile de fonction montre que l'on a plus précisément sur $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0, z \neq 0$

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zt^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{|z|}}\ e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Arctan}(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)})}.$$

1-c $u_0 \in C_c^2 \Rightarrow u_0 \in L^2 \cap L^1$ et $\widehat{u_0} \in L^2 \cap L^1$: En fait le résultat vaut pour u_0 dans C_c^1.

Le premier point est clair puisque u_0 est continue à support compact.
On en déduit $\widehat{u_0} \in L^2$ puis pour presque tout x dans $\mathbb{R}$

$$\widehat{u_0}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} u_0(y)dy.$$

On a donc $|\widehat{u_0}| \leqslant \|u_0\|_{L^1}$ et une intégration par parties conduit à

$$\widehat{u_0}(x) = \frac{1}{2i\pi x} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} u_0'(y)dy,$$

pour presque tout x dans $\mathbb{R}$.

u_0' étant continue à support compact appartient à $L^2 \cap L^1$; l'égalité précédente s'écrit alors

$$\widehat{u_0}(x) = \frac{1}{2i\pi x} \widehat{u_0'}(x)$$

et on a $\widehat{u_0'} \in L^2$. On en déduit que

$$g(x) = \min(\|u_0\|_{L^1} \ , \ \frac{1}{4\pi^2 x^2} + |\widehat{u_0'}(x)|^2)$$

est une fonction majorante intégrable de $\widehat{u_0}$, ce qui fournit $\widehat{u_0} \in L^2 \cap L^1$.

1-d Expression de $\boldsymbol{u(t,x)}$: Traitons d'abord le cas $u_0 \in C_c^1(\mathbb{R})$ afin d'avoir u_0 et $\widehat{u_0}$ dans $L^2 \cap L^1$.
Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction

$$z \longrightarrow e^{-i4\pi^2 t z^2} \widehat{u_0}(z)$$

est dans $L^2 \cap L^1$ et a pour transformée de Fourier inverse la fonction définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi xz} e^{-i4\pi^2 t z^2} \widehat{u_0}(z)dz.$$

Considérons pour $t \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés, la suite de fonctions

$$f_n(z) = \chi_{[-n,n]}(z) e^{i(4\pi^2 t z^2 - 2\pi xz)}.$$

L'intégrale précédente est limite dans $\mathbb{R}$ de la suite $((\widehat{u_0}|f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général peut s'écrire

$$(\widehat{u_0}|f_n) = (\widehat{\widehat{u_0}}|\widehat{f_n}) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f_n}(-z)} u_0(z)dz;$$

en outre on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{f_n}(-z)} &= \int_{-n}^{n} e^{-2i\pi zy} e^{-i(4\pi^2 t y^2 - 2\pi xy)} dy \\
&= \int_{-n}^{n} e^{-i(4\pi^2 t y^2 - 2\pi y(x-z))} dy \\
&= e^{i\frac{(x-z)^2}{4t}} \int_{-\frac{x-z}{4\pi t}-n}^{-\frac{x-z}{4\pi t}+n} e^{-i4\pi^2 t y^2} dy \\
&= \varrho\left(-\frac{x-z}{4\pi t} + n\right) - \varrho\left(-\frac{x-z}{4\pi t} - n\right)
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\varrho(s) = e^{i\frac{(x-z)^2}{4t}} \int_0^s e^{-i4\pi^2 t y^2} dy.$$

ϱ est continue impaire et admet une limite en $+\infty$ qui vaut, compte-tenue de la valeur de J,

$$e^{i\frac{(x-z)^2}{4t}} \int_0^{+\infty} e^{-i4\pi^2 t y^2} dy = \frac{1}{2} \frac{e^{i\frac{(x-z)^2}{4t}}}{(4\pi i t)^{\frac{1}{2}}}$$

où $(4\pi i t)^{\frac{1}{2}}$ désigne la détermination principale de la racine carrée de $4\pi i t$.
Il en résulte l'existence de $C > 0$ tel que Cu_0 soit une fonction majorante intégrable de la suite $(\widehat{f_n}(-z)u_0(z))_{n\in\mathbb{N}}$. Le théorème de convergence dominée conduit donc à

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\frac{(x-z)^2}{4t}}}{(4\pi i t)^{\frac{1}{2}}} u_0(z)dz$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Venons en au cas général. Il a été vu que l'on pouvait approcher u_0 dans L^1 et L^2 par une même fonction $\varphi \in C_c^0$; en utilisant la méthode de régularisation vue en **I-1-b**, on établit l'existence d'une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans C_c^1 convergente vers u_0 dans L^1 et L^2.
Ce qui précède montre que l'on a pour tout $t \in \mathbb{R}^*$

$$\Theta^{(-1)}\left(y \longrightarrow e^{-i4\pi^2ty^2}\widehat{\varphi_n}(y)\right) \quad = \quad \left(x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\frac{(x-z)^2}{4t}}}{(4\pi it)^{\frac{1}{2}}}\varphi_n(z)dz\right).$$

Un passage à la limite dans L^2 dans le membre de gauche et un passage à la limite simple dans le membre de droite conduit à l'égalité pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\frac{(x-z)^2}{4t}}}{(4\pi it)^{\frac{1}{2}}}u_0(z)dz.$$

2 Unicité de la solution de (S) : On a immédiatement, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|\widehat{u(t)}\|_{L^2} = \|\widehat{u_0}\|_{L^2} = \|u_0\|.$$

Une autre solution v de (S) vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2} = \|\widehat{u(t)} - \widehat{v(t)}\|_{L^2} = 0,$$

c'est à dire $u = v$. On retrouve alors un résultat déjà annoncé en **II-1-a** :
Pour $u_0 \in L^2$ donnée, u est définie de façon unique sur $\mathbb{R}$.

3-i Détermination de v pour $V_0(x) = u_0(x - x_0)$: Pour $u_0 \in L^2 \cap L^1$, (3) donne immédiatement

$$v(t,x) = u(t, x - x_0),$$

pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. L'opérateur

$$\varphi \longrightarrow \Theta^{(-1)}\left(y \longrightarrow e^{-i4\pi^2ty^2}\widehat{\varphi}(y)\right)$$

étant continue sur L^2 et $L^2 \cap L^1$ étant partout dense, on en déduit le résultat pour $u_0 \in L^2$.

3-ii Détermination de v pour $V_0(x) = \lambda_0^{\frac{1}{2}}u_0(\lambda_0 x)$: Un raisonnement analogue conduit à

$$v(t,x) = \lambda_0^{\frac{1}{2}}u(\lambda_0^2t, \lambda_0 x),$$

pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

4-a Détermination de c_1 et c_2 : Pour $u_0 \in L^2 \cap L^1$, (3) montre immédiatement que pour le choix de $c_1 = c^2$ et $c_2 = 2c$, la fonction $(t,x) \longrightarrow v(t,x)$ est solution de (S) pour la donnée initiale dans $L^2 \cap L^1$

$$v_0(x) = v(0,x) = e^{ixc}u_0(x).$$

On démontre comme précédemment que le résultat s'étend à $u_0 \in L^2$.

4-b v est solution de (S) : Nous allons établir que $(t,x) \longrightarrow v(t,x)$ est solution de (S) pour la donnée initiale dans L^2

$$v_0(x) = v(0,x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}}\overline{\widehat{u_0}}\left(\frac{x}{4\pi}\right) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}}\widehat{\overline{u_0}}\left(-\frac{x}{4\pi}\right).$$

Traitons d'abord le cas $u_0 \in L^2 \cap L^1$.
On peut alors utiliser (3), ce qui fournit pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$

$$v(t,x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i}{4}(tz^2 - 2xz)}\overline{u_0}(z)dz.$$

Mais la solution de (S) de donnée initiale $v_0 \in L^2$ est la transformée de Fourier inverse de

$$y \longrightarrow e^{-i4\pi^2ty^2}\widehat{v_0}(y) = (4\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-i4\pi^2ty^2}\overline{u}(4\pi y),$$

l'égalité découlant de la formule de réciprocité.
Cette dernière fonction étant dans $L^2 \cap L^1$, la solution s'écrit donc pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$

$$(4\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi xy} e^{-i4\pi^2 ty^2} \overline{u}(4\pi y)dy = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i}{4}(tz^2-2xz)} \overline{u_0}(z)dz = v(t,x)$$

d'où le résultat dans ce premier cas.

Enfin le cas $u_0 \in L^2$ se traite comme dans les questions qui précèdent.

Partie III

1 Exemple demandé : Cette question ne présente d'intérêt que si f est supposée > 0.

Considérons $\varphi(s) = e^{-s^2}$; alors la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(t,x) = \varphi(t)\ \varphi(\varphi^2(t)x)$$

vérifie les propriétés requises.

2 Identité souhaitée : La fonction $\widehat{u_0}$ est contenue dans $C_c^1 \subset L^2 \cap L^1$ donc pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, le théorème de Tonelli assure la sommabilité sur $\mathbb{R}^2$ de

$$(\xi,\eta) \longrightarrow \left| e^{-i4\pi^2 t(\xi^2+\eta^2)+i2\pi x(\xi+\eta)} \widehat{u_0}(\xi)\widehat{u_0}(\eta) \right| = |\widehat{u_0}(\xi)\widehat{u_0}(\eta)|$$

d'où par le théorème de Fubini on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i4\pi^2 t(\xi^2+\eta^2)+i2\pi x(\xi+\eta)} \widehat{u_0}(\xi)\widehat{u_0}(\eta)d\xi d\eta = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i4\pi^2 ty^2+i2\pi xy} \widehat{u_0}(y)dy \right)^2 = u(t,x)^2.$$

Il en résulte

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(t,x)|^6 dxdt = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i4\pi^2 t(\xi^2+\eta^2)+i2\pi x(\xi+\eta)} \widehat{u_0}(\xi)\widehat{u_0}(\eta)d\xi d\eta \right|^3 dxdt.$$

3 Existence de C_1 : Il semblerait qu'il y'ait une erreur dans l'énoncé du résultat à admettre car on a l'inclusion

$$L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2) \subset L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2).$$

Pour que cet énoncé présente un intérêt, on supposera $\widehat{H}$ définie pour $H \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et que l'inégalité admise vaut pour $H \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)$.

Notons Ω le demi-plan ouvert de $\mathbb{R}^2$ situé au dessus de la première bissectrice puis

$$\omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > \pi y^2\}.$$

L'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(\xi,\eta) \longrightarrow \big(\sigma = 2\pi(\xi^2+\eta^2)\ ,\ \tau = -\xi-\eta\big)$$

induit un C^1 difféomorphisme de Ω sur ω dont la réciproque est

$$(\sigma,\tau) \longrightarrow \left(\xi = \frac{1}{2}(-\tau + (\sigma/\pi - \tau^2)^{\frac{1}{2}})\ ,\ \eta = \frac{1}{2}(-\tau - (\sigma/\pi - \tau^2)^{\frac{1}{2}})\right).$$

Ce changement de variable fournit, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i4\pi^2 t(\xi^2+\eta^2)+i2\pi x(\xi+\eta)} \widehat{u_0}(\xi)\widehat{u_0}(\eta)d\xi d\eta &= 2\int_{\Omega} e^{-i4\pi^2 t(\xi^2+\eta^2)+i2\pi x(\xi+\eta)} \widehat{u_0}(\xi)\widehat{u_0}(\eta)d\xi d\eta \\
&= \int_{\omega} e^{-2i\pi(t\sigma+x\tau)} \frac{\widehat{u_0}(\xi)\widehat{u_0}(\eta)}{2\pi(\xi-\eta)} d\sigma d\tau \\
&= \widehat{H}(t,x),
\end{aligned}$$

où l'on a posé sur $\mathbb{R}^2$

$$H(\sigma,\tau)=\frac{\widehat{u_0}(\frac{1}{2}(-\tau+|\sigma/\pi-\tau^2|^{\frac{1}{2}}))\ \widehat{u_0}(\frac{1}{2}(-\tau-|\sigma/\pi-\tau^2|^{\frac{1}{2}}))}{2\pi|\sigma/\pi-\tau^2|^{\frac{1}{2}}}\ \chi_\omega(\sigma,\tau).$$

Introduisons M un majorant de $|\widehat{u_0}|$ et $[-A,A]$ un segment de $\mathbb{R}$ contenant son support. On a successivement

$$\int_{\mathbb{R}^2}|H(\sigma,\tau)|d\sigma d\tau=\int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{u_0}(\xi)|\ |\widehat{u_0}(\eta)|d\xi d\eta\leqslant 4A^2M^2$$

puis

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|H(\sigma,\tau)|^{\frac{3}{2}}d\sigma d\tau&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\widehat{u_0}(\xi)|^{\frac{3}{2}}\ |\widehat{u_0}(\eta)|^{\frac{3}{2}}}{|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}}d\xi d\eta\\&\leqslant\frac{M^3}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{[-A,A]^2}\frac{d\xi d\eta}{|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^2}|H(\sigma,\tau)|^{\frac{3}{2}}d\sigma d\tau\leqslant\frac{16M^3A^{\frac{3}{2}}}{3\pi^{\frac{1}{2}}}$$

donc $H\in L^1(\mathbb{R}^2)\cap L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)$.
D'après le résultat admis, $\widehat{H}\in L^3(\mathbb{R}^2)$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\widehat{H}(t,x)|^3dtdx\leqslant C_2\left\{\int_{\mathbb{R}^2}|H(\sigma,\tau)|^{\frac{3}{2}}d\sigma d\tau\right\}^2.$$

On obtient l'inégalité souhaitée pour le choix de

$$C_1=\frac{C_2^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}.$$

4 Détermination de $C(S)$: L'inégalité de Holder adjointe à l'inégalité admise donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\widehat{u_0}(\xi)|^{\frac{3}{2}}\ |\widehat{u_0}(\eta)|^{\frac{3}{2}}}{|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}}d\xi d\eta&=\int_{\mathbb{R}}\left(|\widehat{u_0}(\xi)|^{\frac{3}{2}}\int_{\mathbb{R}}\frac{|\widehat{u_0}(\eta)|^{\frac{3}{2}}}{|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}}d\eta\right)d\xi\\&\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}}|\widehat{u_0}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}}\frac{|\widehat{u_0}(\eta)|^{\frac{3}{2}}}{|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}}d\eta)^4d\xi\right)^{\frac{1}{4}}\\&\leqslant C_3^{\frac{1}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}}|\widehat{u_0}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}}|\widehat{u_0}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

c'est à dire, puisque la transformée de Fourier est une isométrie sur L^2

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|\widehat{u_0}(\xi)|^{\frac{3}{2}}\ |\widehat{u_0}(\eta)|^{\frac{3}{2}}}{|\xi-\eta|^{\frac{1}{2}}}d\xi d\eta\leqslant C_3^{\frac{1}{4}}\left(\int_{\mathbb{R}}|u_0(x)|^2dx\right)^{\frac{3}{2}}.$$

On obtient donc la majoration souhaitée pour la valeur de

$$C(S)=C_1^2C_3^{\frac{1}{2}}.$$

5 Etude de l'estimation à l'aide de v : Un simple calcul à l'aide d'un changement de variable montre que cette estimation n'est pas améliorée.

Partie IV

1-a Identités vérifiées par u : $u_0 \in C_c^2$ donc on peut appliquer (3) qui alors est une intégrale sur un segment; posons pour $(t,x,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$

$$\Phi(t,x,z) = \frac{e^{i\frac{(x-z)^2}{4t}}}{(4\pi i t)^{\frac{1}{2}}} u_0(z).$$

Φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ (rappelons que la détermination principale de la racine carrée est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$) donc les deux premiers points sont assurés par le théorème de dérivation sous le signe somme.

Par ailleurs on a sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x,z) = -\left(\frac{i(x-z)^2}{4t^2} + \frac{1}{2t}\right) \frac{e^{i\frac{(x-z)^2}{4t}}}{(4\pi i t)^{\frac{1}{2}}} u_0(z)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t,x,z) &= \left(\frac{i}{2t} - \frac{(x-z)^2}{4t^2}\right) \frac{e^{i\frac{(x-z)^2}{4t}}}{(4\pi i t)^{\frac{1}{2}}} u_0(z) \\ &= -i\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x,z);\end{aligned}$$

il en résulte sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} i\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x,z)dz = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t,x,z)dz = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).$$

1-b Etude de $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} u(t)$ dans L^2 : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t)$ est la transformée de Fourier inverse de

$$x \longrightarrow e^{-i4\pi^2 t x^2}\widehat{u_0}(x),$$

fonction qui tend vers $\widehat{u_0}$ dans L^2 à l'origine par application du théorème de convergence dominée.

La transformée de Fourier inverse étant continue sur L^2, on en déduit

$$\lim_{t\longrightarrow 0} u(t) = u_0.$$

2 Détermination de Q : Un petit calcul montre que pour le choix de

$$(\alpha,\beta,\gamma) = (3^{\frac{1}{4}}, 2, \frac{1}{2})$$

la fonction proposée vérifie les propriétés requises.

3 P est solution de (N) : La vérification est immédiate.

4-a S vérifie (N) : Les deux premiers points sont clairement vérifiés.

On a successivement dans $[0,T[\times\mathbb{R}$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,x) = \frac{e^{-\frac{i}{(t-T)}+\frac{ix^2}{4(t-T)}}}{4(T-t)^{\frac{5}{2}}}\left((2(T-t)+i(4-x^2))Q\left(\frac{x}{t-T}\right) - 4xQ'\left(\frac{x}{t-T}\right)\right)$$

puis

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t,x) = \frac{e^{-\frac{i}{(t-T)}+\frac{ix^2}{4(t-T)}}}{4(T-t)^{\frac{5}{2}}}\left((-x^2+2i(t-T))Q\left(\frac{x}{t-T}\right) + 4ixQ'\left(\frac{x}{t-T}\right) + 4Q''\left(\frac{x}{t-T}\right)\right).$$

En remplaçant Q'' par $Q - Q^5$ dans la dernière relation, on obtient le résultat souhaité.

4-b Etude de $\lim\limits_{t\longrightarrow T} S(t,x)$: Q est à décroissance rapide donc cette limite est nulle pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Par ailleurs $\lim\limits_{t\longrightarrow T} |S(t,0)| = +\infty$ donc elle n'admet pas de limite en T dans ce dernier cas.

5 Existence de u_0 : Considérons sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$u_0(x) = \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\ e^{-i\frac{(4-x^2)}{4T}}\ Q\left(\frac{x}{T}\right),$$

pour $T > 0$ fixé.

On a bien $u_0 \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^2$ puis il n'existe pas de solution de (N) sur $\mathbb{R}$ associée à u_0 car en vertu de l'unicité, sa restriction à $[0, T[$ devrait coïncider avec S, qui n'est pas bornée au voisinage de $(T, 0)$.

6-a $\lambda^{\frac{1}{2}}u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est solution de (N) sur $[0, \frac{T}{\lambda^2}]$: La vérification est immédiate.

6-b $P(t, x)$ n'est pas stable dans L^2 : Il nous faut établir la proposition

$$\exists \varepsilon > 0, \forall\, \delta > 0, \exists u_0 \in C^2 \cap L^2 \text{ tel que } \int_{\mathbb{R}} |Q - u_0|^2 \leqslant \delta$$

et tel que pour toute solution éventuelle de (N) sur $\mathbb{R}$, $u(t, x)$ de donnée initiale u_0,

$$\exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \int_{\mathbb{R}} |P(t, x) - u(t, x)|^2 dx > \varepsilon.$$

La fonction $\lambda^{\frac{1}{2}}P(\lambda^2 t, \lambda x)$ est solution de (N) sur $\mathbb{R}$ pour la condition initiale $\zeta_\lambda(x) = \lambda^{\frac{1}{2}}Q(\lambda x)$.

Remarquons que $\lim\limits_{\lambda -> 1} \zeta_\lambda = Q$ dans L^2; en effet on a déjà la convergence simple sur $\mathbb{R}$ puis pour tout $\lambda \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, on a la domination sur $\mathbb{R}$

$$|Q(x) - \zeta_\lambda(x)|^2 \leqslant 5Q^2(x/2).$$

Le membre de droite étant sommable sur $\mathbb{R}$, le théorème de convergence dominée conduit à

$$\|Q - \zeta_\lambda\|^2_{L^2} \xrightarrow[\lambda \to 1]{} 0.$$

Fixons un réel $\delta > 0$; d'après la remarque il existe un voisinage V de 1 tel que :

$$\forall\, \lambda \in V,\ \int_{\mathbb{R}} |Q - \zeta_\lambda|^2 \leqslant \delta.$$

Pour le choix de $u_0 = \zeta_\lambda$ avec $\lambda \in V\backslash\{1\}$, on peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |P(t, x) - u(t, x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} |P(t, x) - \lambda^{\frac{1}{2}}P(\lambda^2 t, \lambda x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |e^{i(1-\lambda^2)t}Q(x) - \lambda^{\frac{1}{2}}Q(\lambda x)|^2 dx \\
&\geqslant \int_{\mathbb{R}} \sin^2((1 - \lambda^2)t)\ Q(x)^2 dx
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}} |P(t, x) - u(t, x)|^2 dx \geqslant \sin^2((1 - \lambda^2)t)\|Q\|^2_{L^2}.$$

En choisissant $t = \dfrac{\pi}{2(1 - \lambda^2)}$, on obtient le résultat souhaité pour la valeur de $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\|Q\|^2_{L^2}$.