Problème 2 : Agrégation externe 2001

Corrigé de l'épreuve d'analyse

Étude du problème de Milne-Schwarzschild.

Solution par F. SUFFRIN, Lycée Kléber Strasbourg

Partie I

1-a Étude de l'exponentielle intégrale : Considérons x un réel > 0.

L'application $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est définie continue sur $[x, +\infty[$, négligeable devant $t \mapsto e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$. Il en résulte la convergence de

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

Par ailleurs, le changement de variable $t = xs$ fournit

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xs}}{s}\, ds,$$

d'où le résultat.

1-b Existence de I : L'application $t \mapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est définie continue sur $]0,1]$, prolongeable par continuité à l'origine par 1. Il en résulte la convergence de I.

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \mathbf{Ei}(x) + \ln x = \mathbf{Ei}(1) - I$ **:** Cela découle de la relation :

$$\forall\, x > 0, \qquad \mathrm{Ei}(x) + \ln x = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt.$$

1-c $0 < \mathrm{Ei}(x) < \dfrac{e^{-x}}{x}$: L'inégalité de gauche est claire.

Considérons un réel $x > 0$. Pour tout $t > x$, on a $\dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{x}$ donc

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt < \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\, dt = \frac{e^{-x}}{x},$$

l'inégalité stricte ayant lieu du fait de la continuité des intégrandes.

Le résultat en découle.

1-d Développement asymptotique de Ei en $+\infty$: Des intégrations par parties successives donnent, pour tout $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Ei}(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n n! e^{-x}}{x^{n+1}} + (-1)^{N+1}(N+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+2}}\, dt.$$

Les inégalités

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+2}}\ dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^{N+2}}\ dt = \frac{e^{-x}}{x^{N+2}},$$

montre que le terme intégrale est dominé par $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{x^{N+2}}$ en $+\infty$.

On en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (-1)^n n!$$

répond à la question.

1-e Ei $\in L^p(\mathbb{R}_+)$: La fonction Ei^p est continue sur $]0, +\infty[$.

L'étude qui précède montre qu'elle est équivalente à $|\ln x|^p$ et donc négligeable devant $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de l'origine.

En outre la majoration fournie en **I-1-c** assure qu'elle est négligeable devant $x \mapsto e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$.

Le résultat annoncé en découle.

2-a $\widehat{K}$ est une fonction continue de $L^2(\mathbb{R})$: C'est du cours. À toute fin utile...

La fonction $(\xi, x) \mapsto e^{-i\xi x}K(x)$ est définie continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, dominée par K qui est sommable sur $\mathbb{R}$. La continuité de $\widehat{K}$ est alors une conséquence du théorème de continuité sous le signe somme.

$K \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ permet de déduire $\widehat{K} \in L^2(\mathbb{R})$, mais nous allons l'établir directement.

$\widehat{K}$ est continue paire et une intégration par parties donne, pour tout $\xi \geqslant 1$

$$\widehat{K}(\xi) = \int_0^{+\infty} \cos(\xi x)\ \mathrm{Ei}(x)\ dx = \frac{1}{\xi}\int_0^{+\infty} \sin(\xi x)\frac{e^{-x}}{x}\ dx,$$

la dernière égalité découlant des propriétés vues en **I-1-b** et **I-1-c**.

Pour voir que la dernière intégrale est une fonction bornée de ξ sur $[1, +\infty[$, on peut par exemple remarquer que

$$\int_0^{+\infty} \sin(\xi x)\frac{e^{-x}}{x}\ dx = \int_0^1 \sin(\xi x)\frac{e^{-x}-1}{x}\ dx + \int_0^1 \frac{\sin(\xi x)}{x}\ dx + \int_1^{+\infty} \sin(\xi x)\frac{e^{-x}}{x}\ dx.$$

On a déjà

$$\left|\int_0^1 \sin(\xi x)\frac{e^{-x}-1}{x}\ dx\right| \leqslant I \quad \text{et} \quad \left|\int_1^{+\infty} \sin(\xi x)\frac{e^{-x}}{x}\ dx\right| \leqslant \mathrm{Ei}(1).$$

Par ailleurs, pour tout $\xi \geqslant 1$

$$\int_0^1 \frac{\sin(\xi x)}{x}\ dx = \int_0^\xi \frac{\sin(x)}{x}\ dx \xrightarrow[\xi\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\ dx,$$

ce qui assure que cette dernière intégrale est une fonction bornée de ξ sur $[1, +\infty[$. On en déduit que $\widehat{K}$ est une fonction dominée par $\xi \mapsto \dfrac{1}{\xi}$ au voisinage de l'infini.

En conclusion $\widehat{K}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$.

$\lim\limits_{\boldsymbol{\xi \longrightarrow +\infty}} \widehat{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$ **:** C'est une conséquence immédiate de ce qui précède, qui n'est autre que le Lemme de Lebesgue.

2-b Détermination du prolongement : On a successivement
- la fonction $x \mapsto e^{-i\xi x}K(x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$, pour tout $\xi \in S(1)$
- la fonction $\xi \mapsto e^{-i\xi x}K(x)$ est holomorphe sur $S(1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
- pour tout $r \in]0,1[$, la fonction définie sur $\overline{S}(r) \times \mathbb{R}^*$ par $(\xi, x) \mapsto e^{-i\xi x}K(x)$ est dominée par $x \mapsto e^{r|x|}K(x)$ qui est sommable sur $\mathbb{R}$, du fait des propriétés vues en **I-1-b** et **I-1-c**.

Le théorème d'holomorphie assure alors que la fonction

$$\xi \mapsto \widehat{K}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}K(x)\, dx$$

est holomorphe sur $S(1)$ et donc constitue le prolongement demandé.

2-c $\boldsymbol{\xi \mapsto \widehat{K}(\xi + i\eta) \in L^2}(\mathbb{R})$ **:** Fixons η dans $]-1,1[$.
La fonction $x \mapsto e^{\eta x}K(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, du fait des propriétés vues en **I-1-b** et **I-1-c**. Il en résulte que sa transformée de Fourier, qui est précisément $\xi \mapsto \widehat{K}(\xi + i\eta)$, est dans $L^2(\mathbb{R})$.

2-d Expression de $\widehat{\boldsymbol{K}}$ **:** Nous exploiterons l'identité vue en **I-2-a** :

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}, \quad \Phi(\xi) = \xi\widehat{K}(\xi) = \int_0^{+\infty} \sin(\xi x)\frac{e^{-x}}{x}\, dx.$$

Φ est continue impaire sur $\mathbb{R}$ et pour tout $a \geqslant 1$, les fonctions

$$(\xi, x) \mapsto \sin(\xi x)\frac{e^{-x}}{x} \qquad \text{et} \qquad (\xi, x) \mapsto \cos(\xi x)e^{-x}$$

sont continues sur $[0,a] \times]0,+\infty[$, dominées par la fonction $x \mapsto ae^{-x}$ qui est sommable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de dérivation sous le signe somme assure alors que Φ est de classe C^1 sur $[0,a]$, avec

$$\forall\, \xi \in [0,a], \quad \Phi'(\xi) = \int_0^{+\infty} \cos(\xi x)e^{-x}\, dx = \frac{1}{1+\xi^2},$$

Ce résultat ayant lieu pour tout $a \geqslant 1$, cette dernière identité vaut pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Comme $\Phi(0) = 0$, on en déduit $\Phi(\xi) = \text{Arctan}\,\xi$ sur $\mathbb{R}$, puis le résultat souhaité pour le choix de $C = 1$, c'est-à-dire

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \widehat{K}(\xi) = \frac{\text{Arctan}\,\xi}{\xi}.$$

Le prolongement holomorphe de $\widehat{K}$ s'écrit donc dans $S(1)\backslash\{0\}$

$$\widehat{K}(z) = \frac{\text{Arctan}\,z}{z} = \frac{\ln(1+iz) - \ln(1-iz)}{2iz},$$

en vertu du principe du prolongement analytique.

$\widehat{K}(0) = 1$: $\widehat{K}$ étant continue à l'origine, cela est obtenu par un simple passage à la limite dans le membre de droite dans la relation qui précède.

3-a Équivalent souhaité : L'expression de $\widehat{K}$ permet d'écrire sur le disque ouvert unité

$$\widehat{K}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{2n+1}.$$

Il en résulte l'équivalent

$$1 - \widehat{K}(z) \underset{0}{\sim} \frac{z^2}{3}.$$

3-b Identité souhaitée : Pour $z \in S(1)\backslash\{0\}$, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+z^2}$ sur $[1, +\infty[$ est donnée par

$$t \mapsto -\frac{\text{Arctan }(z/t)}{z} = \frac{\ln(1 - i(z/t)) - \ln(1 + i(z/t))}{2iz}.$$

Il en découle

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+z^2} = \frac{\text{Arctan } z}{z} = \widehat{K}(z),$$

relation encore vérifiée à l'origine.

Le résultat en est une conséquence directe.

$\widehat{K}(z) \in \mathbb{R}$ ssi $z \in \mathbb{R}$ ou $|\mathrm{Im}(z)| < 1$: Ce qui précède permet d'écrire

$$\forall\, z \in S(1), \quad \widehat{K}(z) - \overline{\widehat{K}(z)} = (\overline{z}^2 - z^2)I(z),$$

avec $I(z) > 0$, d'où la propriété annoncée.

3-c 0 est le seul zéro de $1 - \widehat{K}$: Pour tout $z \in S(1)$, on a

$$\begin{aligned} 1 - \widehat{K}(z) &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+z^2} \\ &= z^2 \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t^2+z^2)} \\ &= z^2 \int_1^{+\infty} \frac{t^2+\overline{z}^2}{t^2|t^2+z^2|^2}\, dt. \end{aligned}$$

Pour tout réel $t \geqslant 1$ et $z \in S(1)$, on peut écrire

$$\mathrm{Re}\left(\frac{t^2+\overline{z}^2}{t^2|t^2+z^2|^2}\right) \geqslant \frac{1-\mathrm{Im}(z)^2}{t^2|t^2+z^2|^2} > 0$$

et donc l'intégrale du dernier membre est non nulle.

Le résultat proposé en découle.

Partie II

1 Les fonctions affines vérifient $(\boldsymbol{EI})$: Il suffit de le contrôler pour les fonctions canoniques.

On a successivement, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\ dy = \widehat{K}(0) = 1$$

puis

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)y\ dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)(x-y)\ dy \\ &= x\int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\ dy - \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)y\ dy.\end{aligned}$$

L'application $y \mapsto yK(y)$ est impaire et sommable sur $\mathbb{R}$. On en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)y\ dy = 0$$

et le résultat.

2-a Convolution ; premières propriétés : Encore du cours. À toute fin utile...

Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x,y)|\ dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x-y)G(y)|\ dx \\ &= |G(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x-y)|\ dx \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}|G(y)|\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x,y)|\ dx\right)\ dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}|G(y)|\ dy \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|G\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty.\end{aligned}$$

On en déduit que $\phi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et $F \star G \in L^1(\mathbb{R})$ avec

$$\|F \star G\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|G\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

2-b $\widehat{\boldsymbol{F \star G}} = \widehat{\boldsymbol{F}}\widehat{\boldsymbol{G}}$: Fixons un réel ξ.

La fonction définie presque partout sur $\mathbb{R}^2$ par $(x,y) \mapsto e^{-i\xi x}\phi(x,y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned}\widehat{F \star G}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\phi(x,y)\ dy\right)\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\phi(x,y)\ dx\right)\ dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi(x-y)}F(x-y)e^{-i\xi y}G(y)\ dx\right)\ dy\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}\widehat{F\star G}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi y} G(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi(x-y)} F(x-y)\ dx\right)\ dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi y} G(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} F(x)\ dx\right)\ dy\\ &= \widehat{F}(\xi)\widehat{G}(\xi).\end{aligned}$$

3-a Existence de $F\star G$: Notons en vertu de **II-2-a** que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto |F(x-y)|\ |G(y)|^2$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$. On en déduit à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky-Schwarz

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x-y)G(y)|\ dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x-y)|^{1/2}\ |F(x-y)|^{1/2}|G(y)|\ dy\\ &\leqslant \|F\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x-y)|\ |G(y)|^2\ dy\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,\end{aligned}$$

d'où ce premier point.

$F\star G \in L^2(\mathbb{R})$: L'inégalité précédente fournit

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x-y)G(y)|\ dy\right)^2\ dx &\leqslant \|F\|_{L^1(\mathbb{R})}\ \||F|\star|G|^2\|_{L^1(\mathbb{R})}\\ &\leqslant \|F\|_{L^1(\mathbb{R})}^2\||G|^2\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty\end{aligned}$$

et donc $F\star G \in L^2(\mathbb{R})$, avec

$$\|F\star G\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|F\|_{L^1(\mathbb{R})}\|G\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

3-b $\widehat{F\star G}(\xi) = \widehat{F}(\xi)\widehat{G}(\xi)$ p.p dans $\mathbb{R}$: G est limite dans $L^2(\mathbb{R})$ d'une suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$. D'après **II-3-a**, $(F\star G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers $F\star G$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
La question **II-2-b** permet alors d'écrire

$$\widehat{G_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\widehat{G}\quad\text{et}\quad\widehat{F\star G_n} = \widehat{F}\widehat{G_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\widehat{F\star G},$$

dans $L^2(\mathbb{R})$.

$\widehat{F}$ est continue donc le résultat s'obtient par extraction d'une sous-suite de $(\widehat{G_n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement presque partout sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{G}$.

On n'a en général pas égalité sur $\mathbb{R}$: Cette question n'a pas lieu de se poser car $\widehat{G}$ est définie à un ensemble négligeable près.

Contentons nous de donner un exemple de fonction $G \in L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ par la formule intégrale.

Prenons G le sinus cardinal $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$. G est limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite $(\chi_{[-n,n]}G)_{n\in\mathbb{N}}$, d'où la convergence de $(\widehat{\chi_{[-n,n]}G})_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\widehat{G}$.

On peut alors en extraire une sous-suite qui converge vers $\widehat{G}$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Comme pour tout ξ réel distinct de ± 1, la suite $(\widehat{\chi_{[-n,n]}G}(\xi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'intégrale semi-convergente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

on peut écrire

$$\widehat{G}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

pour presque tout ξ réel. Mais pour tout $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\frac{\sin x}{x}\,dx &= 2\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\xi x)\sin x}{x}\,dx\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin((1+\xi)x)+\sin((1-\xi)x)}{x}\,dx\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin((1+\xi)x)}{x}\,dx + \int_0^{+\infty}\frac{\sin((1-\xi)x)}{x}\,dx\\ &= (\ \mathrm{sign}(\xi+1) -\ \mathrm{sign}(\xi-1))\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.\end{aligned}$$

On en déduit $\widehat{G} = \chi_{[-1,1]}\pi$ presque partout sur $\mathbb{R}$. (en ± 1 l'intégrale est divergente)

4-5 Solutions de $(\boldsymbol{EI})$ dans $\boldsymbol{L^1}(\mathbb{R})\cup \boldsymbol{L^2}(\mathbb{R})$: L'équation s'écrit $f = K\star f$. Donc on peut écrire $\widehat{f} = \widehat{K}\widehat{f}$, c'est-à-dire $(1-\widehat{K})\widehat{f} = 0$.

$1-\widehat{K}$ s'annulant seulement à l'origine, $\widehat{f} = 0$ et par suite $f = 0$.

Partie III

1-a $\boldsymbol{G_0(x) \underset{-\infty}{=} O(e^{-|x|})}$: Les hypothèses faites sur f assurent l'existence de $\lambda \geqslant 0$ tel que :

$$\forall\, y\in\mathbb{R}_+,\quad |f(y)|\leqslant \lambda e^{\frac{y}{2}}.$$

Alors on peut écrire, pour tout $x\leqslant -1$

$$\begin{aligned}|e^{|x|}G_0(x)| &\leqslant e^{-x}\int_0^{+\infty} K(x-y)|f(y)|\,dy\\ &\leqslant \frac{\lambda e^{-x}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}e^{\frac{y}{2}}\,dy\\ &= \frac{\lambda}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{y-x}\,dy\end{aligned}$$

et donc

$$|e^{|x|}G_0(x)| \leqslant \frac{\lambda}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{y+1}\,dy,$$

d'où le résultat.

1-b $\boldsymbol{F_\beta \in L^1}(\mathbb{R})$: Elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et comme $f(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{\frac{\beta}{2}x})$, on en déduit $F_\beta(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-\frac{\beta}{2}x})$ et le résultat.

$K_\beta \in L^1(\mathbb{R})$: Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$, équivalente à $|\ln|x||$ au voisinage de l'origine et dominée par $e^{(\pm 1-\beta)x}$ au voisinage de $\mp\infty$.

Le résultat en découle.

$G_\beta \in L^1(\mathbb{R})$: Elle est nulle sur $\mathbb{R}_+$ puis le théorème de continuité sous le signe somme permet de vérifier qu'elle est continue sur $]-\infty, 0[$.

Par ailleurs
$$G_\beta(x) = e^{-\beta x} G_0(x) \underset{-\infty}{=} O(e^{(1-\beta)x})$$
puis au voisinage à gauche de l'origine, on a $G_\beta(x) \underset{0}{\sim} G_0(x)$ avec

$$\begin{aligned}
|G_0(x)| &\leqslant \frac{\lambda e^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{y-x}\, dy \\
&\leqslant \frac{\lambda e^{\frac{x}{2}}}{2} \int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}\, dt \\
&\underset{0}{\sim} \frac{\lambda}{2} \int_{-x}^{1} \frac{dt}{t} \\
&= \frac{\lambda}{2} |\ln|x||.
\end{aligned}$$

Donc $G_\beta(x) \underset{0^-}{=} O(|\ln|x||)$, ce qui permet de déduire le résultat annoncé.

$F_\beta - K_\beta \star F_\beta = G_\beta$: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$K_\beta \star F_\beta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\beta(x-y) F_\beta(y)\, dy = e^{-\beta x} \int_0^{+\infty} K(x-y) f(y)\, dy.$$

On en déduit, pour $x \geqslant 0$

$$K_\beta \star F_\beta(x) = e^{-\beta x} f(x) = F_\beta(x) - G_\beta(x)$$

puis pour $x < 0$
$$K_\beta \star F_\beta(x) = -G_\beta(x) = F_\beta(x) - G_\beta(x),$$

d'où le résultat.

2-a Holomorphie de ϕ : Considérons z dans $\mathcal{P}_0^-$.

$f(x) \underset{+\infty}{=} O\left(e^{-\frac{\mathrm{Im}(z)x}{2}}\right)$ donc $x \mapsto e^{-izx} f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, dominée en $+\infty$ par la fonction $x \mapsto e^{\frac{\mathrm{Im}(z)x}{2}}$ qui est sommable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\phi(z)$ est définie.

En adaptant la méthode du **I-2-b**, on établit de même l'holomorphie de ϕ.

2-b $\widehat{F_\beta}(z) = \phi(z - i\beta)$ sur $\mathbb{R}$: La vérification est immédiate.

2-c Prolongement de $\widehat{G_0}$: Les résultats précédents assurent $G_0 \in L^1(\mathbb{R})$ donc on peut écrire sur $\mathbb{R}$

$$\widehat{G_0}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} G_0(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-i\xi x} G_0(x)\, dx.$$

Fixons r un réel > -1.
La fonction $(z,x) \mapsto e^{-izx}G_0(x)$ est continue sur $\overline{\mathcal{P}_r}^+ \times]-\infty, 0[$, dominée par la fonction $x \mapsto e^{rx}|G_0(x)|$ qui est sommable sur $\mathbb{R}_-$, d'après **III-1**.

L'holomorphie du prolongement sur $\mathcal{P}_{-1}^+$ s'établit comme en **I-2-b** alors.

2-d $\phi(z)(1-\widehat{K}(z)) = \widehat{G_0}(z)$: On utilise le résultat du **III-2-b**, en faisant agir la transformée de Fourier sur l'égalité $F_0 - K_0 \star F_0 = G_0$.

3-a Propriétés de A : A est holomorphe sur $S(1)\backslash\{0\}$ par théorème généraux.

En outre, le développement en série entière sur le disque ouvert unité vu en **I-3-a** fournit, pour $z \neq 0$

$$A(z) = (z^2+1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{2n+3}.$$

Donc la relation $A(0) = (1/3)$ prolonge A en une fonction holomorphe sur $S(1)$.

La question **I-3-c** permet de déduire que A est sans zéros sur $S(1)$.

$|A(z)-1| = O(|z|^{-1})$: Une méthode parmi d'autres :

Les relations des questions **I-3-a** et **I-3-c** fournissent dans $S(1)\backslash\{0\}$

$$\widehat{K}(z) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+z^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\widehat{K}(z)}{z^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t^2+z^2)}.$$

On en déduit

$$A(z) - 1 = \int_1^{+\infty} \frac{1-t^2}{t^2(t^2+z^2)}\, dt.$$

Par suite, on peut écrire

$$\begin{aligned}
|A(z)-1| &\leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t^2+z^2|} \\
&\leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t^2+\mathrm{Re}(z^2)|} \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\mathrm{Re}(z)^2-\mathrm{Im}(z)^2}.
\end{aligned}$$

Comme $|z| \longrightarrow +\infty$ et $|\mathrm{Im}(z)| < 1$, on en déduit $|\mathrm{Re}(z)| \underset{|z|\longrightarrow+\infty}{\sim} |z|$.

En particulier, on a $3\ \mathrm{Re}(z)^2 \geqslant 4\ \mathrm{Im}(z)^2$ pour $|z|$ assez grand, d'où

$$\begin{aligned}
|A(z)-1| &\leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+(\mathrm{Re}(z)^2/4)} \\
&= \frac{\pi - 2\ \mathrm{Arctan}(2/|\mathrm{Re}(z)|)}{|\mathrm{Re}(z)|}
\end{aligned}$$

et par suite $|A(z)-1| = O(\frac{1}{|z|})$, ce qui constitue le résultat.

3-b Détermination de $A(\mathbb{R})$: Une expression de A sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$A(z) = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{t^2-1}{t^2(t^2+z^2)}\, dt.$$

C'est une fonction continue paire sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale du second membre étant une fonction strictement décroissante de z sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que A varie entre

$$A(0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{z \longrightarrow +\infty} A(z) = 1.$$

En conclusion, on a $A(\mathbb{R}) = [(1/3), 1[$.

3-c Existence de α : A est continue et tend vers 1 lorsque $|z| \longrightarrow +\infty$, dans $S(1)$. Elle est donc uniformément continue sur $\overline{S}(1/2)$.
On en déduit l'existence d'un réel α dans $]0, (1/4)]$ tel que :

$$\forall\, (z,t) \in \overline{S}(1/2)^2, \quad |z-t| \leqslant 2\alpha \Rightarrow |A(z) - A(t)| \leqslant (1/12).$$

Considérons $z \in \overline{S}(\alpha)$ et posons $t = \mathrm{Re}(z)$. On a $|z-t| = |\mathrm{Im}(z)| \leqslant \alpha$ et par suite $|A(z) - A(t)| \leqslant (1/12)$. Il en découle

$$(1/3) - \mathrm{Re}(A(z)) \leqslant A(t) - \mathrm{Re}(A(z)) \leqslant (1/12)$$

et donc

$$\mathrm{Re}(A(z)) \geqslant (1/3) - (1/12) > (1/6).$$

Le résultat en découle.

4-a Étude des limites proposées : $A(\overline{S}(\alpha)) \subset \{z \in \mathbb{C}\ ; \mathrm{Re}(z) > (1/6)\}$ donc $\ln A$ est définie continue sur $\overline{S}(\alpha)$. Comme $\ln A(t) \xrightarrow[|t| \to +\infty]{} 0$, elle est bornée sur $\overline{S}(\alpha)$ c'est-à-dire il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall\, t \in \overline{S}(\alpha), \quad |\ln A(t)| \leqslant M.$$

Par ailleurs, pour tout $(t,z) \in [R - i\alpha, R + i\alpha] \times \mathbb{C}$, on peut écrire

$$|t - z| \geqslant |t| - |z| \geqslant R - |z|.$$

On en déduit, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et R assez grand

$$\left| \int_{R-i\alpha}^{R+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z}\, dt \right| \leqslant 2\alpha \frac{M}{R - |z|} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

La seconde intégrale se traite de manière analogue.

4-b Étude de A_+ et A_- : Commençons par considérer z dans $\mathcal{P}^+_{-\alpha}$.
La fonction

$$s \mapsto \frac{\ln A(s - i\alpha)}{s - i\alpha - z}$$

est définie continue sur $\mathbb{R}$ et **III-3-a** fournit, lorsque s tend vers $\pm\infty$

$$\ln A(s - i\alpha) \sim A(s - i\alpha) - 1 = O(\frac{1}{|s|}).$$

Il en résulte

$$\frac{\ln A(s - i\alpha)}{s - i\alpha - z} = O(\frac{1}{s^2})$$

au voisinage de $\pm\infty$ et donc l'existence de

$$A_+(z) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt\right) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln A(s-i\alpha)}{s-i\alpha-z}\,ds\right).$$

Posons enfin, pour tout $R > 0$ et $\varepsilon > 0$

$$T_{\varepsilon,R} = \{z \in \overline{\mathcal{P}}^+_{-\alpha+\varepsilon}\,;|\mathrm{Re}(z)| \leqslant R\}.$$

Un petit dessin permet de vérifier que $(t,z) \mapsto \dfrac{\ln A(t)}{t-z}$ est dominée sur $T_{\varepsilon,R}$ par

$$t \mapsto \frac{\ln A(t)}{|t+R+i\alpha|}\chi_{]-\infty-i\alpha,-R-1-i\alpha[}(t) + \frac{\ln A(t)}{\varepsilon}\chi_{[-R-1-i\alpha,R+1-i\alpha]}(t) + \frac{\ln A(t)}{|t-R+i\alpha|}\chi_{]R+1-i\alpha,+\infty-i\alpha[}(t)$$

qui est une fonction sommable sur la droite $\mathrm{Im}(z) = -\alpha$.

L'holomorphie de A_+ s'obtient alors comme dans **I-2-b**.

L'étude de A_- se traite de manière analogue.

4-c $\boldsymbol{A(z) = \dfrac{A_+(z)}{A_-(z)}}$ **:** Fixons $z \in S(\alpha)$. La définition de α fournit également

$$A(S(2\alpha)) \subset \{z \in \mathbb{C}\,;\mathrm{Re}(z) > (1/6)\}.$$

L'application A et le logarithme étant respectivement holomorphes sur $S(2\alpha)$ et sur le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > (1/6)$, on en déduit par composition l'holomorphie de l'application $z \mapsto \ln A(z)$ sur $S(2\alpha) \supset \overline{S}(\alpha)$.

Pour tout $R > 0$ assez grand, on peut écrire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{-R-i\alpha}^{R-i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2i\pi}\int_{-R+i\alpha}^{R+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt$$
$$=$$
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2i\pi}\int_{R-i\alpha}^{R+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2i\pi}\int_{-R-i\alpha}^{-R+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt,$$

γ_R désignant le bord du rectangle joignant les 4 points $\pm R \pm i\alpha$ orienté dans le sens direct. Les deux dernières intégrales du membre de droite ont pour limite 0, lorsque $R \longrightarrow +\infty$, en vertu de **III-4-a**.

Le théorème des résidus fournit alors, pour tout $R > 0$ assez grand

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt = \mathrm{Res}\left(\frac{\ln A(t)}{t-z}\right) = \ln A(z).$$

Il en découle

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt = \ln A(z)$$

et le résultat annoncé.

5 Théorème de Liouville : Considérons $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ la série de Taylor en 0 de Φ. Pour tout $r>0$, les inégalités de Cauchy donnent :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad |a_n|\leqslant \frac{M(r)}{r^n}$$

où l'on a noté $M(r)=\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\Phi(re^{i\theta})$. Considérons un entier $n>N$.
On peut écrire,

$$|a_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}=o(r^{N+1-n})\xrightarrow[r\to\infty]{}0$$

c'est-à-dire $a_n=0$, d'où le résultat.

6-a Identité souhaitée : On a successivement, pour tout $z\in\mathcal{P}^+_{-\alpha}\cap\mathcal{P}^-_0$

$$\begin{aligned}\frac{(z+i)\widehat{G_0}(z)}{A_+(z)}&=\frac{(z+i)(1-\widehat{K}(z))\phi(z)}{A(z)A_-(z)}\\&=\frac{z^2\phi(z)}{(z-i)A_-(z)}\end{aligned}$$

d'où le résultat.

6-b Existence de C : Les fonctions

$$z\mapsto\frac{(z+i)\widehat{G_0}(z)}{A_+(z)}\quad\text{et}\quad z\mapsto\frac{z^2\phi(z)}{(z-i)A_-(z)}$$

sont définies holomorphes respectivement sur $\mathcal{P}^+_{-\alpha}$ et $\mathcal{P}^-_0$ et coincident sur $\mathcal{P}^+_{-\alpha}\cap\mathcal{P}^-_0$. Cela rend licite la définition de l'application H sur $\mathbb{C}$:

$$\forall\, z\in\mathbb{C},\quad H(z)=\begin{cases}\frac{(z+i)\widehat{G_0}(z)}{A_+(z)} & \text{si } z\in\mathcal{P}^+_{-\alpha}\\ \frac{z^2\phi(z)}{(z-i)A_-(z)} & \text{si } z\in\mathcal{P}^-_0\end{cases}.$$

H est alors une fonction entière.

Par ailleurs $\ln A(t)=O(\frac{1}{|t|})$ lorsque $|t|$ tend vers $+\infty$ dans $\overline{S}(\alpha)$ donc $s\mapsto\ln A(s-i\alpha)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$, d'où par Cauchy-Bouniakowsky-Schwarz on peut écrire sur $\overline{\mathcal{P}_{-\alpha/2}}^+$

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt\right|^2&\leqslant\int_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha}\frac{dt}{|t-z|^2}\int_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha}|\ln A(t)|^2\,dt\\&=\frac{\pi}{\mathrm{Im}(z)+\alpha}\int_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha}|\ln A(t)|^2\,dt\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left|\int_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\,dt\right|^2\leqslant\frac{2\pi}{\alpha}\int_{-\infty-i\alpha}^{+\infty-i\alpha}|\ln A(t)|^2\,dt.$$

Donc A_+^{-1} est bornée sur $\overline{\mathcal{P}_{-\alpha/2}}^+$.

Enfin on a $|\widehat{G_0}(z)| \leqslant \|G_{\alpha/2}\|_{L^1(\mathbb{R})}$ sur $\overline{\mathcal{P}_{-\alpha/2}}^{+}$.

Il en résulte

$$|H(z)| = \frac{|z+i||\widehat{G_0}(z)|}{|A_+(z)|} = O(|z|)$$

lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ dans $\overline{\mathcal{P}_{-\alpha/2}}^{+}$.
On vérifie une majoration analogue de A_-^{-1} sur $\mathcal{P}^-_{\alpha/2}$. Comme on a

$$|\phi(z)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha x}{2}} |f(x)|\, dx$$

sur $\mathcal{P}^-_{\alpha/2}$, on en déduit

$$|H(z)| = \frac{|z|^2 \|\phi(z)|}{|z-i||A_-(z)|} = O(|z|)$$

lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ dans $\mathcal{P}^-_{\alpha/2}$ et donc $|H(z)| = O(|z|)$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ dans $\mathbb{C}$.

Le théorème de Liouville vue précédemment assure que H est affine.
$G_0 \in L^1(\mathbb{R})$ donc sa transformée de Fourier vérifie le Lemme de Lebesgue.
Il en résulte sur $\mathbb{R}$, au voisinage de $+\infty$

$$H(z) = \frac{|z+i||\widehat{G_0}(z)|}{|A_+(z)|} = o(z)$$

et donc H est constante. La propriété annoncée en découle.

7-a $\boldsymbol{f(x) = \int_{-\infty-i\beta}^{+\infty-i\beta} \phi(z) e^{izx}\, \frac{dz}{2\pi}}$ **:** Commençons par contrôler que l'intégrale de droite est une fonction définie continue de x sur $]0, +\infty[$.

On a sur $\mathbb{R} - i\beta$ et pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\phi(z)e^{izx} &= \frac{C}{2\pi}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)e^{izx} \\
&= \frac{C}{2\pi}\frac{z-i}{z^2}e^{izx} + \frac{C}{2\pi}\frac{z-i}{z^2}(A_-(z)-1)e^{izx}.
\end{aligned}$$

Une intégration par parties fournit

$$\int_{-\infty-i\beta}^{+\infty-i\beta} \frac{C}{2\pi}\frac{z-i}{z^2}e^{izx}\, dz = \frac{C}{2\pi i x}\int_{-\infty-i\beta}^{+\infty-i\beta} \frac{z-2i}{z^3}e^{izx}\, dz,$$

expression qui est bien une fonction définie continue de $x > 0$ grâce au théorème de convergence dominée, puisque $z \mapsto \dfrac{z-2i}{z^3}$ est sommable sur $\mathbb{R} - i\beta$.

Par ailleurs la fonction $z \mapsto \dfrac{z-i}{z^2}(A_-(z)-1)$ est continue sur $\mathbb{R} - i\beta$ et $O(\dfrac{1}{|z|^{\frac{5}{4}}})$ lorsque $|z| \underset{\mathrm{Im}(z)=-\beta}{\longrightarrow} +\infty$, comme nous allons le vérifier.
On peut écrire sur $\mathbb{R} - i\beta$

$$\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \frac{\ln A(t)}{t-z}\, dt = \int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha \\ |t|\leqslant\sqrt{|z|}}} \frac{\ln A(t)}{t-z}\, dt + \int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha \\ |t|>\sqrt{|z|}}} \frac{\ln A(t)}{t-z}\, dt.$$

$\ln A$ est bornée sur $\mathbb{R}+i\alpha$ donc le premier terme du découpage vérifie

$$\begin{aligned}\left|\int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha\\|t|\leqslant\sqrt{|z|}}}\frac{\ln A(t)}{t-z}\ dt\right| &\leqslant \|\ln A\|_\infty \int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha\\|t|\leqslant\sqrt{|z|}}}\frac{1}{|t-z|}\ dt\\ &\leqslant \|\ln A\|_\infty \int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha\\|t|\leqslant\sqrt{|z|}}}\frac{1}{|z|-\sqrt{|z|}}\ dt\\ &= O(\frac{1}{\sqrt{|z|}})\end{aligned}$$

lorsque $|z| \underset{\mathrm{Im}(z)=-\beta}{\longrightarrow} +\infty$. Pour le second terme, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha\\|t|>\sqrt{|z|}}}\frac{\ln A(t)}{t-z}\ dt\right|^2 &\leqslant \int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha\\|t|>\sqrt{|z|}}}|\ln A(t)|^2\ dt\int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha\\|t|>\sqrt{|z|}}}\frac{dt}{|t-z|^2}\\ &\leqslant \frac{\pi}{\alpha+\beta}\int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha\\|t|>\sqrt{|z|}}}|\ln A(t)|^2\ dt\end{aligned}$$

et comme

$$\int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha\\|t|>\sqrt{|z|}}}|\ln A(t)|^2\ dt = O(\int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha\\|t|>\sqrt{|z|}}}\frac{dt}{|t|^2}) = O(\frac{1}{\sqrt{|z|}}),$$

on en déduit

$$\int_{\substack{\mathbb{R}+i\alpha\\|t|>\sqrt{|z|}}}\frac{\ln A(t)}{t-z}\ dt = O(\frac{1}{|z|^{\frac{1}{4}}}) \quad \text{puis} \quad \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\ dt = O(\frac{1}{|z|^{\frac{1}{4}}})$$

lorsque $|z| \underset{\mathrm{Im}(z)=-\beta}{\longrightarrow} +\infty$.

Ces dominations conduisent à

$$\frac{z-i}{z^2}(A_-(z)-1) \sim \frac{1}{2i\pi z}\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\frac{\ln A(t)}{t-z}\ dt = O(\frac{1}{|z|^{\frac{5}{4}}})$$

lorsque $|z| \underset{\mathrm{Im}(z)=-\beta}{\longrightarrow} +\infty$ d'où sa sommabilité sur $\mathbb{R}-i\beta$. Le théorème de convergence dominée assure alors la continuité sur $]0,+\infty[$ de

$$\int_{-\infty-i\beta}^{+\infty-i\beta}\frac{C}{2\pi}\frac{z-i}{z^2}(A_-(z)-1)e^{izx}\ dz$$

et le premier point annoncé.

Enfin on a successivement, pour $x>0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty-i\beta}^{+\infty-i\beta}\phi(z)e^{izx}\ \frac{dz}{2\pi} &= \frac{e^{\beta x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(s-i\beta)e^{isx}\ ds\\ &= \frac{e^{\beta x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{F_\beta}(s)e^{isx}\ ds\end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de **III-2-b**.
F_β étant dans $L^2(\mathbb{R})$, la formule d'inversion de Fourier montre que la valeur de cette intégrale est $f(x)$, pour presque tout $x > 0$. Comme elle est une fonction continue de $x > 0$, il y a égalité pour tout $x > 0$ ce qui constitue le résultat.

7-b Domination demandée : On a sur $\mathbb{R} + i\alpha'$ et pour tout $x > 0$

$$e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z) = e^{izx}\frac{z-i}{z^2} + e^{izx}\frac{z-i}{z^2}(A_-(z)-1).$$

Une intégration par parties fournit

$$\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} \frac{z-i}{z^2}e^{izx}\ dz = \frac{1}{ix}\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} \frac{z-2i}{z^3}e^{izx}\ dz$$

d'où on en déduit

$$\left|\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} \frac{z-i}{z^2}e^{izx}\ dz\right| \leqslant \frac{e^{-\alpha' x}}{x}\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} \left|\frac{z-2i}{z^3}\right|\ dz = O(e^{-\alpha' x})$$

lorsque $x \longrightarrow +\infty$ puis on vérifie comme dans la question précédente la sommabilité de la fonction $z \mapsto \dfrac{z-i}{z^2}(A_-(z)-1)$ sur $\mathbb{R} + i\alpha'$, ce qui fournit

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}(A_-(z)-1)\ dz\right| &\leqslant e^{-\alpha' x}\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} \frac{|z-i|}{|z|^2}|A_-(z)-1|\ dz\\ &= O(e^{-\alpha' x})\end{aligned}$$

lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

En conclusion, on a

$$\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ dz = O(e^{-\alpha' x})$$

lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

7-c Détermination de *a* et *b* : Les résultats qui précèdent conduisent à

$$\begin{aligned}&f(x) - \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ dz\\ &= \int_{-\infty-i\alpha'}^{+\infty-i\alpha'} \phi(z)e^{izx}\ \frac{dz}{2\pi} - \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ dz\\ &= \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty-i\alpha'}^{+\infty-i\alpha'} \frac{z-i}{z^2}A_-(z)e^{izx}\ dz - \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ dz,\end{aligned}$$

pour tout $x > 0$.
Considérons γ_R le bord du rectangle joignant les 4 points $\pm R \pm i\alpha'$ orienté dans le sens direct, pour tout $R > 0$.
A_- est holomorphe sur $\mathcal{P}_\alpha^-$ donc le théorème des résidus fournit

$$\begin{aligned}\frac{C}{2\pi}\int_{\gamma_R} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ dz &= \operatorname{Res}\left(iCe^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\right)\\ &= C(iA_-(0)x + iA_-(0) + A'_-(0)),\end{aligned}$$

pour tout $R > 0$. Autrement dit, on a

$$\frac{C}{2\pi}\left(\int_{-R-i\alpha'}^{R-i\alpha'} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ dz - \int_{-R+i\alpha'}^{R+i\alpha'} + \int_{R-i\alpha'}^{R+i\alpha'} + \int_{-R+i\alpha'}^{-R-i\alpha'}\right)$$
$$= C(iA_-(0)x + iA_-(0) + A'_-(0)),$$

pour tout $R > 0$. On montre comme en **III-6-b** pour A_+ que A_- est bornée sur $\overline{S}(\alpha')$ et donc que les deux dernières intégrales sont de limite nulle lorsque R tend vers $+\infty$.

Il en découle

$$\frac{C}{2\pi}\int_{-\infty-i\alpha'}^{+\infty-i\alpha'} \frac{z-i}{z^2}A_-(z)e^{izx}\ dz - \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ dz$$
$$= C(iA_-(0)x + iA_-(0) + A'_-(0))$$

et

$$f(x) - \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ dz = C(ax+b)$$

pour le choix de $a = iA_-(0)$ et $b = iA_-(0) + A'_-(0)$, d'où le résultat.

7-d $A_-(0) = \sqrt{3}$: Une méthode parmi d'autres : $\ln A$ est holomorphe sur $\overline{S}(\alpha)$ donc on peut écrire, pour tout $R > 0$ assez grand

$$\int_{-R+i\alpha}^{R+i\alpha} \ln A(t)\frac{dt}{t} + \int_{R+i\alpha}^{R} + \int_{R}^{r} - \int_{\mathcal{C}^+(0,r)} + \int_{-r}^{-R} + \int_{-R}^{-R+i\alpha} = 0.$$

A étant paire, on obtient

$$\int_{-R+i\alpha}^{R+i\alpha} \ln A(t)\frac{dt}{t} - \int_{\mathcal{C}^+(0,r)} + \int_{R+i\alpha}^{R} + \int_{-R}^{-R+i\alpha} = 0,$$

pour tout $R > 0$ assez grand. On vérifie comme en **III-4-a** que les deux dernières intégrales sont de limite nulle lorsque R tend vers $+\infty$. On en déduit

$$\int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \ln A(t)\frac{dt}{t} = \int_{\mathcal{C}^+(0,r)} \ln A(t)\frac{dt}{t}$$

et donc

$$A_-(0) = \exp\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}^+(0,r)} \ln A(t)\frac{dt}{t}\right).$$

En outre cette dernière relation vaut pour tout $r \in]0,\alpha[$.
On peut écrire

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,r)} \ln A(t)\frac{dt}{t} = \int_{\mathcal{C}^+(0,r)} \frac{\ln A(t) - \ln A(0)}{t}\ dt + \ln A(0)\int_{\mathcal{C}^+(0,r)} \frac{dt}{t}.$$

La première intégrale du membre de droite tend vers 0 lorsque r tend vers 0 car son intégrande est prolongeable par continuité à l'origine par 0 puis on a :

$$\forall\, r \in]0,\alpha[, \quad \int_{\mathcal{C}^+(0,r)} \frac{dt}{t} = -\int_0^{\pi} i\ d\theta = -i\pi.$$

Il en résulte

$$\int_{\mathcal{C}^+(0,r)} \ln A(t)\frac{dt}{t} \xrightarrow[r\to 0]{} -i\pi\ln A(0) = i\pi\ln 3$$

et par suite

$$A_-(0) = \sqrt{3}.$$

7-e Unicité de f : Ce qui précède permet de déduire qu'une solution f du problème (WH) est de la forme sur $]0,+\infty[$

$$f(x) = C\int_{-\infty+i\alpha'}^{+\infty+i\alpha'} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ \frac{dz}{2\pi} + C(ax+b)$$

où $\alpha' \in]0,\alpha[$ et C est une constante complexe. L'intégrale précédente est indépendante du choix de α' dans $]0,\alpha[$ puis le résultat vu en **III-7-b** adjoint à la condition $f(x) \sim x$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$ conduit à la relation

$$C = \frac{1}{a} = -i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

En conclusion, on peut affirmer que le problème (WH) admet au plus une solution et que sous réserve d'existence, son expression est donnée sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = -i\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\int_{-\infty+i(\alpha/2)}^{+\infty+i(\alpha/2)} e^{izx}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ \frac{dz}{2\pi} + ax+b\right).$$

Partie IV

1-a $\mathcal{F}_u$ est constante : $u \in L^\infty(B)$ et on a sur B

$$\left|\mu\frac{\partial u}{\partial x}(x,\mu)\right| \leqslant |u(x,\mu)| + |<u>(x)| \leqslant 2\|u\|_{L^\infty(B)}$$

donc on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme.

On vérifie alors $\mathcal{F}_u' = 0$, d'où le résultat.

1-b Expression de $\mathcal{G}_u$: Comme dans ce qui précède, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. On obtient sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_u'(x) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,\mu)\ d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-\mu u(x,\mu) + <u>(x)\mu)\ d\mu \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu u(x,\mu)\ d\mu \\
&= -\mathcal{F}_u,
\end{aligned}$$

d'où on en déduit :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \mathcal{G}_u(x) = \mathcal{G}_u(0) - x\mathcal{F}_u$$

1-c $\mathcal{F}_u = 0$ et $\mathcal{G}_u$ est constante : $u \in \mathcal{E}$ donc $\mathcal{G}_u$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ du fait de son expression intégrale.
Les résultats sont alors une simple conséquence de son écriture affine établie dans la question précédente.

2-a $\mathcal{H}_u$ est décroissante : Comme dans ce qui précède, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. On a successivement sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}'_u(x) &= \int_{-1}^{1} \mu \frac{\partial u}{\partial x}(x,\mu) u(x,\mu)\ d\mu \\
&= \int_{-1}^{1} (< u > (x) - u(x,\mu)) u(x,\mu)\ d\mu \\
&= 2 < u > (x)^2 - \int_{-1}^{1} u(x,\mu)^2\ d\mu
\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{H}'_u(x) \leqslant 0$ par l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky-Schwarz .
Le résultat en découle.

2-b $(x,\mu) \mapsto u(x,\mu) - < u > (x)$ est dans $L^2(B)$: On a, pour tout $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (u(x,\mu) - < u > (x))^2\ d\mu &= \int_{-1}^{1} u(x,\mu)^2\ d\mu + 2 < u > (x)^2 \\
&\quad - 2 < u > (x) \int_{-1}^{1} u(x,\mu)\ d\mu \\
&= \int_{-1}^{1} u(x,\mu)^2\ d\mu - 2 < u > (x)^2 \\
&= -\mathcal{H}'_u(x)
\end{aligned}$$

donc on en déduit, pour tout $R > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^R \int_{-1}^{1} (u(x,\mu) - < u > (x))^2\ d\mu dx &= -\int_0^R \mathcal{H}'_u(x)\ dx \\
&= \mathcal{H}_u(0) - \mathcal{H}_u(R).
\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_u$ est décroissante, minorée sur $\mathbb{R}_+$ du fait de

$$|\mathcal{H}_u(x)| \leqslant \|u\|^2_{L^\infty(B)}$$

donc elle admet une limite en $+\infty$. Il en résulte

$$\int_0^{+\infty} \int_{-1}^{1} (u(x,\mu) - < u > (x))^2\ d\mu dx < +\infty$$

et la propriété annoncée.

2-c Relation souhaitée : On a, pour tout $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mu (u(x,\mu) - < u > (x))^2\ d\mu &= \int_{-1}^{1} \mu u(x,\mu)^2\ d\mu - 2 < u > (x) \int_{-1}^{1} \mu u(x,\mu)\ d\mu \\
&= 2\mathcal{H}_u(x) - 4 < u > (x) \mathcal{F}_u \\
&= 2\mathcal{H}_u(x),
\end{aligned}$$

d'où on en déduit sur $\mathbb{R}_+$

$$\mathcal{H}_u(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu(u(x,\mu) - <u>(x))^2\, d\mu.$$

2-d $\lim\limits_{+\infty} \mathcal{H}_u(x) = 0$: On a sur $\mathbb{R}_+$

$$|\mathcal{H}_u(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (u(x,\mu) - <u>(x))^2\, d\mu.$$

Le membre de droite est dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ d'après **IV-2-b**, il en découle $\mathcal{H}_u \in L^1(\mathbb{R}_+)$. En outre puisque $\mathcal{H}_u$ admet une limite en $+\infty$, celle-ci ne peut être que nulle, d'où le résultat. Notons alors au passage la positivité de $\mathcal{H}_u$.

2-e Détermination de C_1 : Les questions **IV-2-b** et **IV-2-d** fournissent

$$\begin{aligned}
\|u - <u>\|^2_{L^2(B)} &= \mathcal{H}_u(0)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \mu h(\mu)^2\, d\mu - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} |\mu| u(0,\mu)^2\, d\mu\\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \mu h(\mu)^2\, d\mu.
\end{aligned}$$

La valeur $C_1 = (1/2)$ répond à la question.

3 (MSa-b) admet au plus une solution dans $\mathcal{E}$ continue : Considérons v et w de telles solutions.
Alors $\sigma = v - w$ est une solution continue sur B de (MSa-b) avec $h = 0$.
Admettons provisoirement le résultat de la question **IV-4-b**.
Donc $\sigma - <\sigma>$ est continue d'où l'inégalité vue précédemment fournit $\sigma = <\sigma>$.
Notons en particulier que σ ne dépend que de $x \geqslant 0$.
(MSa) conduit alors à $\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}(.,1) = 0$ et donc $\sigma(.,1)$ est constante sur $\mathbb{R}_+$.
Comme $\sigma(0,1) = 0$, il en résulte résulte $\sigma(.,1) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et par suite $\sigma = 0$.
En conclusion on a $v = w$, d'où le résultat annoncé.

4-a Relations (1a) et (1b) : $u \in L^\infty(B)$ donc $<u>$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Il est facile alors de vérifier que les intégrales proposées sont bien définies.
Ces relations s'obtiennent en remplaçant $<u>(y)$ grâce à (MSa) puis à l'aide d'une intégration par parties.

4-b Continuité de $<v>$: Il s'agit du théorème de continuité sous le signe somme. À toute fin utile ...
v est bornée et $v(.,\mu)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, pour tout μ non nul dans $[-1,1]$.
Alors le théorème de continuité sous le signe somme assure la continuité de $<v>$.

4-c (MSa-b) admet au plus une solution dans $\mathcal{E}$: Considérons v et w de telles solutions.
Alors $\sigma = v - w$ est une solution de (MSa-b) avec $h = 0$. Il en résulte sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sigma(x,\mu) = \int_0^x e^{-(x-y)/\mu}\frac{1}{\mu} <\sigma>(y)\, dy, \quad 0 < \mu \leqslant 1 \qquad \text{(1a)}$$

$$\sigma(x,\mu) = \int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|} \frac{1}{|\mu|} < \sigma > (y)\ dy, \quad -1 \leqslant \mu < 0. \qquad \text{(1b)}$$

Remarquons alors que les seconds membres de (1a-b) sont des fonctions continues de (x,μ) sur B. En effet, (1a) s'écrit sur $\mathbb{R}_+$

$$\sigma(x,\mu) = \frac{x}{\mu} \int_0^1 e^{-\frac{x}{\mu}(1-s)} < \sigma > (xs)\ ds, \quad 0 < \mu \leqslant 1.$$

La continuité de l'intégrale se traite comme en **IV-4-b**, puisque $< \sigma >$ est continue bornée. De même (1b) s'écrit sur $\mathbb{R}_+$

$$\sigma(x,\mu) = \frac{1}{|\mu|} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{|\mu|}} < \sigma > (s+x)\ ds, \quad -1 \leqslant \mu < 0.$$

$< \sigma >$ est continue bornée donc l'intégrale a son intégrande continue sur $\mathbb{R}_+ \times [-1,0[$, dominée par $s \mapsto \|\sigma\|_{L^\infty(B)}\ e^{-s}$ qui est sommable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de continuité sous le signe somme assure la continuité de cette dernière intégrale.

On en déduit que σ est une solution continue de (MSa-b) dans $\mathcal{E}$ avec $h = 0$. Comme la fonction nulle constitue une autre solution, il en découle par la question **IV-3** que $\sigma = 0$ puis le résultat annoncé.

5-a Croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Ce résultat est immédiat par récurrence en utilisant $h \geqslant 0$ et en remarquant la positivité de $v \mapsto < v >$.

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \|h\|_{L^\infty([0,1])}$: On l'établit par récurrence, en remarquant les relations, pour $x \geqslant 0$

$$e^{-\frac{x}{\mu}} + \int_0^x e^{-(x-y)/\mu} \frac{1}{\mu}\ dy = 1, \quad 0 < \mu \leqslant 1$$
$$\int_x^{+\infty} e^{-(y-x)/|\mu|} \frac{1}{|\mu|}\ dy = 1, \quad -1 \leqslant \mu < 0.$$

5-b Détermination de u : La suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par $\|h\|_{L^\infty(B)}$. Elle converge alors simplement sur B vers l'application $u = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ qui vérifie $0 \leqslant u \leqslant \|h\|_{L^\infty(B)}$.
En outre u vérifie (1a-b) en vertu du théorème de la convergence monotone.

5-c $u \in \mathcal{E}$: $< u >$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ donc les intégrales dans

$$u(x,\mu) = e^{-x/\mu} h(\mu) + \frac{e^{-x/\mu}}{\mu} \int_0^x e^{y/\mu} < u > (y)\ dy, \quad 0 < \mu \leqslant 1 \qquad \text{(1a)}$$

$$u(x,\mu) = \frac{e^{x/|\mu|}}{|\mu|} \int_x^{+\infty} e^{-y/|\mu|} < u > (y)\ dy, \quad -1 \leqslant \mu < 0 \qquad \text{(1b)}$$

sont des fonctions localement lipschitziennes de x, donc continues.
Il en résulte la continuité de $u(.,\mu)$, puis de $< u >$ par les mêmes arguments qu'en **IV-4-b** et enfin $u(.,\mu) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, pour tout μ non nul dans $[-1,1]$.

Donc u est un élément de $\mathcal{E}$.

En outre une simple dérivation dans ces dernières expressions montrent que u vérifie (MSa-b).

5-d Détermination de u : Considérons $\theta = h + \|h\|_{L^\infty([0,1])}$.
θ est une fonction de $L^\infty([0,1])$ à valeurs $\geqslant 0$ donc le problème (MSa-b) associée à la fonction θ admet une solution $u_\theta \in \mathcal{E}$ d'après la question précédente.

La fonction $u = u_\theta - \|h\|_{L^\infty([0,1])}$ est une solution dans $\mathcal{E}$ au problème (MSa-b), solution qui est unique d'après **IV-4-c**.

6-a Détermination de g : On trouve sur $[-1,1]$, $g(\mu) = a - \mu$ où $a \in \mathbb{R}$.

6-b Existence et unicité de w : Posant $u = w + \mu - x$, (2a-b-c) équivaut à montrer l'existence et l'unicité d'une solution dans $\mathcal{E}$ au problème (MSa-b) pour $h(\mu) = \mu$.

Le résultat relève de l'étude précédente alors.

6-c Calcul de l'intégrale proposée : En gardant la notation précédente on a successivement, pour tout $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu w(x,\mu)\ d\mu &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu(u(x,\mu) - \mu + x)\ d\mu \\ &= \mathcal{F}_u + (1/3) \\ &= (1/3),\end{aligned}$$

la seconde égalité découlant de **IV-1-c**.

7-a $< w >$ est solution du problème (WH) : On garde toujours les notations précédentes. Remarquons la relation, pour x et y distincts dans $\mathbb{R}_+$

$$K(x-y) = \frac{1}{2}\ \mathrm{Ei}(|x-y|) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-|x-y|/\mu}\frac{d\mu}{\mu}.$$

$< u >$ étant bornée, on en déduit l'existence des intégrales de (1a-b) obtenues en remplaçant u par w puis on vérifie alors que w satisfait (1a-b) pour $h = 0$.
De même la fonction

$$y \mapsto K(|x-y|) < w > (y)$$

est sommable sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $x \geqslant 0$.
Le théorème de Fubini fournit donc grâce à (1a-b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 w(x,\mu)\ d\mu &= \frac{1}{2}\int_0^x \int_0^1 e^{-(x-y)/\mu}\frac{1}{\mu} < w > (y)\ d\mu dy \\ &= \int_0^x K(x-y) < w > (y)\ dy,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-1}^0 w(x,\mu)\ d\mu &= \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \int_{-1}^0 e^{-(y-x)/|\mu|}\frac{1}{|\mu|} < w > (y)\ d\mu dy \\ &= \int_x^{+\infty} K(x-y) < w > (y)\ dy,\end{aligned}$$

pour tout $x \geqslant 0$.

On en déduit sur $\mathbb{R}_+$

$$< w > (x) = \int_0^{+\infty} K(x-y) < w > (y)\ dy.$$

En outre, on a lorsque x tend vers $+\infty$

$$< w > (x) =< u > (x) + x \sim x$$

puisque $u \in \mathcal{E}$ est bornée.

Enfin l'unicité relève de l'étude menée dans la partie précédente.

7-b Expression de W : On remplace $< w >$ par la relation obtenue en **III-7-e** dans

$$w(0,-\mu) = \int_0^{+\infty} e^{-y/\mu}\frac{1}{\mu} < w > (y)\ dy.$$

On trouve

$$w(0,-\mu) = \int_0^{+\infty} e^{-y/\mu}\frac{1}{\mu}C\left(\int_{-\infty+i(\alpha/2)}^{+\infty+i(\alpha/2)} e^{izy}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ \frac{dz}{2\pi} + ay + b\right)\ dy$$

et par le théorème de Fubini (justification aisée)

$$\begin{aligned} w(0,-\mu) &= \int_{-\infty+i(\alpha/2)}^{+\infty+i(\alpha/2)} \int_0^{+\infty} e^{-y/\mu}\frac{C}{\mu}e^{izy}\frac{z-i}{z^2}A_-(z)\ dy\frac{dz}{2\pi} + C(a\mu+b) \\ &= C\int_{-\infty+i(\alpha/2)}^{+\infty+i(\alpha/2)} \frac{z-i}{z^2(1-iz\mu)}A_-(z)\ \frac{dz}{2\pi} + C(a\mu+b). \end{aligned}$$

Pour calculer la dernière intégrale, on considère le contour orienté négativement, réunion de $\mathcal{C}_R$ le demi-cercle centré à l'origine, de rayon $R > (\alpha/2)$ inclus dans $\mathcal{P}^-_{\alpha/2}$ et le segment $\mathcal{I}_R$ de $\mathbb{R} + i(\alpha/2)$ sur lequel il s'appuie.

L'intégrande présente les pôles 0 et $-\dfrac{i}{\mu}$. Il est facile de voir que l'intégrale sur $\mathcal{C}_R$ tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$. On obtient alors finalement

$$W(\mu) = \frac{\sqrt{3}}{3}A_-(-i/\mu)(1+\mu).$$

Partie V

1 Détermination de C_2 : Les questions **IV-2-b** et **IV-2-d** fournissent

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_u(x) &\leqslant \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (u(x,\mu)- < u > (x))^2\ d\mu \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{H}'_u(x) \end{aligned}$$

d'où $x \mapsto \mathcal{H}_u(x)e^{2x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc *a fortiori* :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \mathcal{H}_u(x) \leqslant e^{-2x}\mathcal{H}_u(0).$$

On peut donc écrire successivement, grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int_0^R \int_{-1}^1 (u(x,\mu) - <u>(x))^2 e^{2\gamma x}\, dx d\mu &= \int_0^R e^{2\gamma x} |\mathcal{H}_u'(x)|\, dx \\ &= \mathcal{H}_u(0) - \mathcal{H}_u(R) e^{2\gamma R} \\ &+ 2\gamma \int_0^R e^{2\gamma x} \mathcal{H}_u(x)\, dx.\end{aligned}$$

La majoration ci-dessus fournit $\mathcal{H}_u(R)e^{2\gamma R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ et la sommabilité sur $\mathbb{R}_+$ de l'application $x \mapsto e^{2\gamma x}\mathcal{H}_u(x)$. Il en résulte

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \int_{-1}^1 (u(x,\mu) - <u>(x))^2 e^{2\gamma x}\, dx d\mu &= \mathcal{H}_u(0) + 2\gamma \int_0^{+\infty} e^{2\gamma x} \mathcal{H}_u(x)\, dx \\ &\leqslant \mathcal{H}_u(0) + 2\gamma \int_0^{+\infty} e^{-2(1-\gamma)x} \mathcal{H}_u(0)\, dx \\ &= \frac{\mathcal{H}_u(0)}{1-\gamma}.\end{aligned}$$

Le réel $C_2 = (1/2)$ répond à la question.

2-a Détermination de C_3 : On a successivement sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}|<u>(x) - l|^2 &= \left(\frac{3}{2}\int_{-1}^1 \mu^2 (u(x,\mu) - <u>(x))\, d\mu\right)^2 \\ &\leqslant \frac{9}{10}\int_{-1}^1 (u(x,\mu) - <u>(x))^2\, d\mu,\end{aligned}$$

la dernière majoration découlant de l'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky-Schwarz .

Le réel $C_3 = (9/10)$ vérifie les propriétés requises.

2-b Détermination de C_4 : On commence par écrire sur B

$$\begin{aligned}(u(x,\mu) - l)^2 e^{2\gamma x} &\leqslant 2(u(x,\mu) - <u>(x))^2 e^{2\gamma x} + 2(<u>(x) - l)^2 e^{2\gamma x} \\ &\leqslant 2(u(x,\mu) - <u>(x))^2 e^{2\gamma x} \\ &+ 2C_3 \int_{-1}^1 (u(x,\mu) - <u>(x))^2 e^{2\gamma x}\, d\mu.\end{aligned}$$

On en déduit en intégrant par rapport à μ sur $[-1,1]$

$$\int_{-1}^1 (u(x,\mu) - l)^2 e^{2\gamma x}\, d\mu \leqslant (2+4C_3)\int_{-1}^1 (u(x,\mu) - <u>(x))^2 e^{2\gamma x}\, d\mu.$$

et par suite

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_{-1}^1 (u(x,\mu) - l)^2 e^{2\gamma x}\, d\mu dx &\leqslant (2+4C_3)\int_0^{+\infty}\int_{-1}^1 (u(x,\mu) - <u>(x))^2 e^{2\gamma x}\, d\mu dx \\ &\leqslant \frac{(2+4C_3)C_2}{(1-\gamma)} \int_0^1 \mu h(\mu)^2\, d\mu.\end{aligned}$$

Le réel $C_4 = (14/5)$ vérifie les propriétés requises.

3 Expression de l : Une dérivation sous le signe somme (justification aisée) montre que la fonction proposée est constante sur $\mathbb{R}_+$ et vaut donc

$$\int_{-1}^{1} \mu w(0,-\mu)u(0,\mu)\ d\mu = \int_0^1 \mu W(\mu)h(\mu)\ d\mu.$$

Cependant on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mu w(x,-\mu)u(x,\mu)\ d\mu &= \int_{-1}^{1} \mu w(x,-\mu)(u(x,\mu)-l)\ d\mu + l\int_{-1}^{1} \mu w(x,-\mu)\ d\mu \\ &= \int_{-1}^{1} \mu w(x,-\mu)(u(x,\mu)-l)\ d\mu - \frac{2}{3}l\end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de **IV-6-c**.

La fonction

$$x \mapsto \int_{-1}^{1} \mu w(x,-\mu)(u(x,\mu)-l)\ d\mu$$

est constante sur $\mathbb{R}_+$.
Nous allons établir qu'elle est dans $L^2(\mathbb{R}_+)$, ce qui montrera que cette constante est nulle.

L'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky-Schwarz donne

$$\left(\int_{-1}^{1} \mu w(x,-\mu)(u(x,\mu)-l)\ d\mu\right)^2 \leqslant \int_{-1}^{1} \mu^2 w(x,\mu)^2 e^{-2\gamma x}\ d\mu \int_{-1}^{1} (u(x,\mu)-l)^2 e^{2\gamma x}\ d\mu$$

où γ est un réel fixé de $[0,1[$.

La dernière intégrale est sommable sur $\mathbb{R}_+$ en vertu de ce qui précède.

Par ailleurs, on a $w(x,\mu) = x + v(x,\mu)$ avec $v \in \mathcal{E}$ et donc *a fortiori* v bornée. Il en découle

$$x \mapsto \int_{-1}^{1} \mu^2 w(x,\mu)^2 e^{-2\gamma x}\ d\mu$$

est de limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$ et par suite est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Le dernier point annoncé en résulte et par suite

$$l = -\frac{3}{2}\int_0^1 \mu W(\mu)h(\mu)\ d\mu.$$