Agrégation externe 2001

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques générales

Géométrie des formes quadratiques, théorème de John ;
théorème de Brunn-Minkowski ; application.

Solution par F. SUFFRIN, Lycée Kléber Strasbourg

Partie I — Généralités

1 Convexité de K_θ : Pour $x = (1-\theta)x_0 + \theta x_1, y = (1-\theta)y_0 + \theta y_1$ dans K_θ et $t \in [0,1]$, l'élément $tx + (1-t)y = (1-\theta)(tx_0 + (1-t)y_0) + \theta(tx_1 + (1-t)y_1) \in K_\theta$ du fait de la convexité de K_0 et K_1.

2 $(A(K))^* = {}^t\!A^{-1}(K^*)$: On a successivement

$$\begin{aligned}(A(K))^* &= \{y \in \mathbb{R}^n \ ; (\forall\, x \in A(K)), \langle x, y\rangle \leqslant 1\}\\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \ ; (\forall\, \xi \in K), \langle A(\xi), y\rangle = \langle \xi,\ {}^t\!A(y)\rangle \leqslant 1\}\\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ {}^t\!A(y) \in K^*\}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(A(K))^* = {}^t\!A^{-1}(K^*).$$

3-a Étude de I_x : Montrons que I_x est non vide.
$\lim\limits_{s \longrightarrow 0} sx = 0$ et K est un voisinage de l'origine donc il existe $s_0 > 0$ tel que $s_0 x \in K$. Il en résulte $s_0^{-1} \in I_x$.

Montrons que I_x est convexe non bornée.
Considérons λ dans I_x. Le cas $\lambda = 0$ conduit à $I_x = I_0 = \mathbb{R}_+$ puis au résultat.
Sinon pour $\mu \geqslant \lambda$ et $t = \lambda\mu^{-1}$, on peut écrire

$$\mu^{-1}x = (1-t)0 + t(\lambda^{-1}x) \in K$$

ce qui fournit $\mu \in I_x$ et par suite $[\lambda, +\infty[\subset I_x$.
On en déduit que $I_x = \bigcup\limits_{\lambda \in I_x} [\lambda, +\infty[$ est convexe non bornée.

Montrons que I_x est fermé.
Ce qui précède montre qu'il suffit d'établir que I_x contient sa borne inférieure ρ.

Fixons ε un réel > 0. Alors $\rho + \varepsilon$ est un élément de I_x.
Traitons le cas $\rho = 0$. Si δ désigne le diamètre de K, on a $\|x\| \leqslant \varepsilon\delta$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $x = 0$ et donc $I_x = \mathbb{R}_+$. Le résultat est donc vrai dans ce premier cas

Sinon on peut écrire $(\rho+\varepsilon)^{-1}x \in K$ puis en faisant tendre ε vers 0, $\rho^{-1}x \in K$ du fait de la compacité de K et par suite $\rho \in I_x$, d'où le résultat.

3-b Étude de la jauge ; $x \in K \iff j_K(x) \leqslant 1$: Un élément x de $\mathbb{R}^n$ est contenu dans K si et seulement si $1 \in I_x$, c'est-à-dire si et seulement si $j_k(x) \leqslant 1$.

$x \in \partial K \iff j_K(x) = 1$: Il suffit de montrer que $x \in \mathbb{R}^n$ est intérieur à K si et seulement si $j_K(x) < 1$.

Supposons x intérieur à K. La fonction $s \mapsto s^{-1}x$ est continue en 1 donc il existe $\lambda < 1$ tel que $\lambda^{-1}x$ soit contenu dans K d'où $j_K(x) < 1$.

Supposons réciproquement $j_K(x) < 1$ et introduisons un réel $\lambda \in]j_K(x), 1[$. Alors $y = \lambda^{-1}x$ est un élément de K et l'ensemble

$$x + (1-\lambda)K = \lambda y + (1-\lambda)K$$

est un voisinage de x contenu dans K. Donc x est intérieur à K.

4-a-1 Étude du cas $K =$ boule unité de $\mathbb{R}^n$: L'inégalité de Cauchy-Bouniakowsky-Schwarz montre l'inclusion $K \subset K^*$.

Considérons $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\| > 1$. Alors $x = \dfrac{y}{\|y\|} \in K$ vérifie $\langle x, y\rangle = \|y\| > 1$ ce qui assure $y \notin K^*$ et par suite $K^* \subset K$.
En conclusion on a $K = K^*$.

La question précédente fournit alors immédiatement $j_K = j_{K^*} = \| \, \|$.

4-a-2 Étude du cas $K = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_\infty \leqslant 1\}$: Montrons la relation

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_1 \leqslant 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant 1\}.$$

Considérons $y \in K^*$. Pour le choix de $x = (\text{sign } y_1, \ldots, \text{sign } y_n) \in K$, on a $\langle x, y\rangle = |y_1| + \ldots + |y_n| \leqslant 1$ d'où l'inclusion $K^* \subset \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_1 \leqslant 1\}$.

Par ailleurs pour $\|y\|_1 \leqslant 1$ et $x \in K$, on peut écrire

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \leqslant |y_1| + \ldots + |y_n| \leqslant 1$$

d'où l'inclusion inverse et le résultat annoncé.

On en déduit de même les relations $j_K = \| \, \|_\infty$ et $j_{K^*} = \| \, \|_1$.

4-a-3 Étude du cas $K =$ parallélépipède de centre O : K est l'image du cube précédent par une matrice inversible A. D'après le résultat établi en **I-2**, K^* est le parallélépipède, image de $\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant 1\}$ par ${}^tA^{-1}$.

A mettant en bijection les faces de $\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_\infty \leqslant 1\}$ et de K, on en déduit $j_K(Ax) = \|x\|_\infty$ c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad j_K(x) = \|A^{-1}x\|_\infty.$$

De même on vérifie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad j_{K^*}(x) = \|{}^tAx\|_1.$$

4-b K^* est un corps convexe, compact, avec $O \in \overset{\circ}{K}$: Considérons pour $x \in \mathbb{R}^n$, la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ $\langle x, .\rangle : \eta \mapsto \langle x, \eta\rangle$.

Elle est continue donc $\langle x, .\rangle^{-1}(]-\infty, 1])$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. Il en résulte

$$K^* = \bigcap_{x \in K} \langle x, .\rangle^{-1}(]-\infty, 1])$$

est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

K est un voisinage de l'origine donc il existe $R > 0$ tel que

$$B(0, R) = \{y \in \mathbb{R}^n \,;\, \|y\| < R\} \subset K.$$

Considérons $y \neq 0 \in K^*$. Alors $\dfrac{Ry}{\|y\|} \in K$ ce qui conduit à

$$\langle y, \frac{Ry}{\|y\|} \rangle \leqslant 1$$

c'est-à-dire $\|y\| \leqslant R^{-1}$ d'où la compacité de K^*.

Enfin si δ désigne le diamètre de K, on a pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\| \leqslant \delta^{-1}$

$$\forall\, x \in K, \quad |\langle y, x\rangle| \leqslant \delta\|y\| \leqslant 1$$

donc $B(0, \delta^{-1}) \subset K$, ce qui établit le dernier point.

$j_{K^*}(y) = \max\{\langle x, y\rangle \ ; x \in K\}$: On a successivement, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} j_{K^*}(y) &= \min\{\lambda \in \mathbb{R}_+ ; y \in \lambda K^*\} \\ &= \min\{\lambda \in \mathbb{R}_+ ; (\forall\, x \in K), \langle x, y\rangle \leqslant \lambda\} \\ &= \sup\{\langle x, y\rangle \ ; x \in K\} \\ &= \max\{\langle x, y\rangle \ ; x \in K\}, \end{aligned}$$

du fait de la compacité de K.

4-c Quand K est O-symétrique sa jauge est une norme : L'étude menée précédemment a dégagé :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad j_K(x) \geqslant 0$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Montrons que j_K est positivement homogène.
Considérons $x \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{R}$. Pour $k > 0$, on a successivement

$$\begin{aligned} j_K(kx) &= \min\{k\lambda > 0 \ ; kx \in (k\lambda)K\} \\ &= \min\{k\lambda > 0 \ ; x \in \lambda K\} \\ &= k\min\{\lambda > 0 \ ; x \in \lambda K\} \\ &= kj_K(x), \end{aligned}$$

relation encore vérifiée pour $k = 0$.
Pour $k < 0$, on peut écrire $j_K(kx) = |k| j_K(-x)$. Comme K est O-symétrique,

$$j_K(-x) = \min\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \ ; -x \in \lambda K\} = \min\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \ ; x \in \lambda K\} = j_K(x),$$

ce qui établit ce second point.

Montrons que j_K est sous-additive.
Soient x et y des éléments non nuls de $\mathbb{R}^n$. On a $\dfrac{x}{j_K(x)} \in K$ et $\dfrac{y}{j_K(y)} \in K$, donc

$$\frac{x+y}{j_K(x) + j_K(y)} = \frac{j_K(x)}{j_K(x) + j_K(y)} \frac{x}{j_K(x)} + \frac{j_K(y)}{j_K(x) + j_K(y)} \frac{y}{j_K(y)} \in K.$$

Il en résulte $j_K(x + y) \leqslant j_K(x) + j_K(y)$, inégalité encore vérifiée si x ou y est nul. Ceci établit le troisième point et par suite j_K est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Enfin, il est clair que K^* est O-symétrique, d'où sa jauge associée constitue également une norme sur $\mathbb{R}^n$.

La relation établie en **I-4-b**, montre *via* le théorème de représentation de Riesz que $(\mathbb{R}^n, j_{K^*})$ est le dual topologique de $(\mathbb{R}^n, j_K)$

5-a Détermination de u : On a

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \langle x, a - p_K(a)\rangle = \langle p_K(a), a - p_K(a)\rangle\}.$$

Les éléments a et $p_K(a)$ sont distincts. Une caractérisation classique de $p_K(a)$ est donnée par :

$$\forall\, \xi \in K, \quad \langle \xi, a - p_K(a)\rangle \leqslant \langle p_K(a), a - p_K(a)\rangle.$$

Elle permet de vérifier, en choisissant

$$\xi = \frac{a - p_K(a)}{j_K(a - p_K(a))},$$

l'inégalité $0 < \langle p_K(a), a - p_K(a)\rangle$ et de déduire que l'élément

$$u = \frac{a - p_K(a)}{\langle p_K(a), a - p_K(a)\rangle}$$

possède les propriétés requises.

5-b $(K^*)^* = K$: L'inclusion $K \subset (K^*)^*$ est immédiate.

Par ailleurs considérons $a \in \mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à K et associons lui l'élément u construit précédemment. D'après ce qui précède $u \in K^*$ et $\langle a, u\rangle > 1$ c'est-à-dire a n'appartient pas à $(K^*)^*$. On en déduit $(K^*)^* \subset K$ et le résultat annoncé.

6 Construction de φ_K et φ^K : Des raisons de commodité, nous invite à noter pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ de tel façon à avoir $x = (x', x_n)$ dans le repère proposée.

La compacité de K permet de poser sur $pr_H(K)$

$$\varphi_K(x') = \min\{\eta \,;\, (x', \eta) \in K\} \quad \text{et} \quad \varphi^K(x') = \max\{\eta \,;\, (x', \eta) \in K\}.$$

Pour tout $x \in K$ tel que $x' \in pr_H(K)$, on a clairement

$$\varphi_K(x') \leqslant x_n \leqslant \varphi^K(x').$$

Supposons qu'un élément $x \in \mathbb{R}^n$ soit tel que $x' \in pr_H(K)$ avec l'inégalité ci-dessus vérifiée. Considérons $t \in [0,1]$ tel que

$$x_n = t\varphi_K(x') + (1-t)\varphi^K(x').$$

$a = (x', \varphi_K(x'))$ et $b = (x', \varphi^K(x'))$ étant dans K, on en déduit $x = ta + (1-t)b \in K$, et la caractérisation demandée des éléments de K.

Enfin pour x', y' dans $pr_H(K)$ et $t \in [0,1]$,

$$t(x', \varphi_K(x')) + (1-t)(y', \varphi_K(y')) = (tx' + (1-t)y', t\varphi_K(x') + (1-t)\varphi_K(y'))$$

est un élément de K, d'où par définition

$$\varphi_K(tx' + (1-t)y') \leqslant t\varphi_K(x') + (1-t)\varphi_K(y')$$

ce qui établit la convexité de φ_K. La concavité de φ^K s'établit de façon analogue.

Partie II — Géométrie des formes quadratiques

1 Détermination de $\sqrt{A^{-1}}$: On sait qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = {}^tP\mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P,$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$ sont les valeurs propres de A.

Alors la matrice $B = {}^tP\mathrm{Diag}(\lambda_1^{-1/2}, \cdots, \lambda_n^{-1/2})P$, répond à la question.
On en déduit

$$\begin{aligned} E(A) &= \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \langle x, Ax\rangle \leqslant 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \langle x, B^{-2}x\rangle \leqslant 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \|B^{-1}x\| \leqslant 1\} \end{aligned}$$

et donc $E(A) = B(B_n)$ où B_n désigne la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

2 $A \mapsto (\det A)^{-1/2}$ est strictement convexe : On peut effectivement suivre l'indication fournie et montrer que la fonction est logarithmiquement convexe.
Mais en vu d'une prochaine utilisation, il sera agréable d'établir le classique

Lemme : Si A et B sont des matrices symétriques > 0 de $M_n(\mathbb{R})$, on a

$$(det\ A)^{\frac{1}{n}} + (det\ B)^{\frac{1}{n}} \leqslant (det\ (A+B))^{\frac{1}{n}}$$

avec égalité si et seulement si A et B sont positivement proportionnelles.

Démonstration : On sait qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ simultanément orthogonale pour les produits scalaires induits par A et B.

On peut donc trouver $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^tPAP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = D \quad \text{et} \quad {}^tPBP = \mathrm{Diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \Delta$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ sont des réels > 0. Ainsi, l'inégalité à établir équivaut à

$$(\det\ D)^{\frac{1}{n}} + (\det\ \Delta)^{\frac{1}{n}} \leqslant (\det\ (D+\Delta))^{\frac{1}{n}}$$

c'est-à-dire

$$\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} \mu_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} (\lambda_i + \mu_i)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Cette relation découle de l'inégalité arithmético-géométrique car on a

$$\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} + \frac{1}{n}\sum_{i\leqslant i\leqslant n} \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} = 1,$$

avec un cas d'égalité si et seulement si

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1} = \cdots = \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1} = \cdots = \frac{\mu_n}{\lambda_n+\mu_n},$$

c'est-à-dire
$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \cdots = \frac{\lambda_n}{\mu_n},$$
d'où le lemme.

Considérons $t \in [0,1]$ puis A et B des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques > 0. Le lemme permet d'écrire
$$t(\det A)^{\frac{1}{n}} + (1-t)(\det B)^{\frac{1}{n}} \leqslant (\det (tA + (1-t)B))^{\frac{1}{n}}.$$

La fonction $x \mapsto x^{-\frac{n}{2}}$ étant strictement convexe sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit
$$\begin{aligned}(\det (tA+(1-t)B))^{-\frac{1}{2}} &\leqslant (t(\det A)^{\frac{1}{n}} + (1-t)(\det B)^{\frac{1}{n}})^{-\frac{n}{2}} \\ &\leqslant t(\det A)^{-\frac{1}{2}} + (1-t)(\det B)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Pour $t \in]0,1[$, le cas d'égalité conduit successivement à A et B sont positivement proportionnelles et $\det A = \det B$, c'est-à-dire $A = B$.

Le résultat annoncé en découle.

Autre méthode : Une méthode élégante consiste à remarquer à l'aide d'une base orthonormale de réduction (voir le problème d'analyse d'agrégation externe 1996), pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique > 0
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2)}\, dy = (\det A)^{-1/2} I$$
où
$$I = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt\right)^n = \pi^{n/2}.$$
La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant strictement convexe sur $\mathbb{R}$, le résultat devient immédiat.

3-a Compacité de $\boldsymbol{\mathcal{E}_{K,v}}$: Considérons $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique > 0 dont l'ellipsoïde associé est contenu dans K.
Pour tout x non nul dans $\mathbb{R}^n$, $y = \langle Ax, x\rangle^{-\frac{1}{2}} x \in E(A)$ donc $j_K(y) \leqslant 1$ ce qui fournit
$$j_K(x)^2 \leqslant \langle Ax, x\rangle,$$
inégalité encore vérifiée en 0. Réciproquement, si cette dernière relation est vérifiée, on a clairement $E(A) \subset K$.
Ainsi elle constitue une caractérisation des ellipsoïdes contenus dans K.

Par ailleurs le volume de $E(A)$ s'écrit
$$\int_{\langle Ax,x\rangle \leqslant 1} dx = \int_{\|B^{-1}x\| \leqslant 1} dx \underset{x=By}{=} \det B \int_{\|y\| \leqslant 1} dy = (\det A)^{-1/2} V_n,$$
où V_n est le volume de la boule euclidienne n-dimensionnelle. C'est donc une fonction continue de A.
Remarque : Rappelons que l'on obtient par le théorème de Fubini
$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Il est alors aisé de vérifier que

$$\mathcal{E}_{K,v} = \{E(A)\ ;(\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ j_K(x)^2 \leqslant \langle Ax, x\rangle) \wedge ((\det A)^{-1/2} V_n \geqslant v)\}$$

est fermé.

Enfin K étant O-symétrique, j_K est une norme sur $\mathbb{R}^n$, d'où l'existence de $C > 0$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad C\|x\| \leqslant j_K(x).$$

Notons $\varrho(A)$ le rayon spectrale de A et $\varrho(A) = \lambda_n \geqslant \cdots \geqslant \lambda_1 > 0$ ses valeurs propres. Ce qui précède donne, pour tout $A \in \mathcal{E}_{K,v}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad C\|x\|^2 \leqslant \langle Ax, x\rangle,$$

d'où $\lambda_1 \geqslant C$.

Enfin l'inégalité $(\det A)^{-1/2} V_n \geqslant v$ s'écrit

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n \leqslant \left(\frac{V_n}{v}\right)^2.$$

On en déduit

$$C^{n-1}\lambda_n \leqslant \left(\frac{V_n}{v}\right)^2$$

c'est-à-dire $\varrho(A) \leqslant V_n^2 v^{-2} C^{1-n}$, ce qui assure que $\mathcal{E}_{K,v}$ est bornée.

En conclusion $\mathcal{E}_{K,v}$ est compact.

3-b Étude de l'ellipsoïde de John : K est compact donc est contenu dans un pavé P. Les ellipsoïdes inclus dans K sont alors de volume $\leqslant \mathrm{vol}(P)$, d'où

$$v = \sup_{E(A)\subset K} \mathrm{vol}(E(A))$$

est un réel > 0 et $\mathcal{E}_{K,\frac{v}{2}}$ est un compact non vide.
La fonction volume étant continue sur $\mathcal{E}$, on en déduit

$$v = \sup_{E(A)\in\ \mathcal{E}_{K,(v/2)}} \mathrm{vol}(E(A)) = \max_{E(A)\in\ \mathcal{E}_{K,(v/2)}} \mathrm{vol}(E(A))$$

d'où l'existence d'un ellipsoïde inclus dans K de volume maximal pour cette propriété.

Montrons l'unicité d'un tel ellipsoïde.
Si C et C' sont des corps convexes tels que $C \subset C'$, alors $(C')^* \subset C^*$.
En utilisant les notations de la question **II-1** et l'identité établie en **I-2**, on obtient

$$(E(A))^* = (B(B_n))^* = B^{-1}(B_n) = E(A^{-1}).$$

La conjugaison constitue donc une correspondance bijective entre l'ensemble des ellipsoïdes contenus dans K et l'ensemble des ellipsoïdes contenant K^*.
Comme on a

$$\mathrm{vol}(E(A))\ \mathrm{vol}((E(A))^*) = V_n^2,$$

un ellipsoïde inclus dans K de volume maximal pour cette propriété a pour conjugué un ellipsoïde contenant K^* de volume minimal pour cette dernière propriété.

L'ensemble des matrices symétriques > 0 de $M_n(\mathbb{R})$ dont l'ellipsoïde associé contient K^* est un ensemble convexe sur lequel la fonction $A \mapsto \mathrm{vol}(E(A))$ est strictement convexe, d'après **II-2**. Son minimum est alors unique, d'où le résultat.

PS : Signalons que cet ellipsoïde a déjà fait l'objet d'une étude dans le problème d'analyse d'agrégation externe 1996.

4-a Détermination de q_K : Commençons par dégager quelques propriétés élémentaires du groupe Is_K.

La norme subordonnée à j_K des éléments de Is_K est $\leqslant 1$ ce qui assure que Is_k est bornée. Le déterminant réalisant un morphisme de groupes continue de $(\mathrm{Is}_k, \circ)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$, on en déduit $\det(\ \mathrm{Is}_K) \subset \{-1, 1\}$.

Considérons alors q_K la forme quadratique associée à E_K.
Pour un élément fixé u de Is_K, on peut écrire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad j_K(u^{-1}(x))^2 \leqslant j_K(x)^2 \leqslant q_K(x)$$

d'où on en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad j_K(x)^2 \leqslant q_K(u(x)) = q'(x).$$

Notons A, A' et U les matrices canoniquement associées à q_K, q' et u.
On a la relation $A' = {}^tUAU$, ce qui fournit

$$\mathrm{vol}(E(A')) = (\ \det A')^{-1/2}V_n = |\ \det U|^{-1}(\ \det A)^{-1/2}V_n = \mathrm{vol}(E(A))$$

d'où par unicité d'un tel ellipsoïde $A = A'$ et donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad q_K(u(x)) = q(x).$$

Ainsi la forme quadratique q_K vérifie les propriétés requises.

4-b-1 Étude de $K = B_n$: On a immédiatement $E_K = B_n$ puis la forme quadratique $q_K(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ vérifie les propriétés requises.

4-b-2 Étude de $K = \{x \in \mathbb{R}^n\ ; \|x\|_\infty \leqslant 1\} = C$: E_K et q_K doivent être invariants par le groupe du cube. On en déduit facilement $E_K = B_n$ et la forme quadratique $q_K(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ vérifie les propriétés requises.

4-b-3 K = parallélépipède de $\mathbb{R}^n$ de centre O : K est l'image du cube C par une matrice inversible A.
Cet isomorphisme réalise en particulier une bijection entre les ellipsoïdes contenus dans C et ceux contenus dans K, multipliant alors leur volume par le réel $|\ \det A|$.

On en déduit

$$E_K = A(B_n) = E((A\ {}^tA)^{-1}).$$

Enfin sa forme quadratique associée

$$q_K(x) = \langle (A\ {}^tA)^{-1}x, x\rangle$$

vérifie les propriétés requises.

Partie III — Théorème de Brunn-Minkowski

1-a Étude du cas $n_0 = n_1 = 1$: Considérons $K_0 = P(a, b)$ et $K_1 = P(c, d)$ deux parallélépipèdes rectangles de cotés de longueur respectif l_i et L_i, $i \in [\![1, n]\!]$.

Il nous faut établir la relation

$$\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} l_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} L_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} (l_i + L_i)\right)^{\frac{1}{n}},$$

inégalité déjà étudiée dans le lemme de la question **II-2**. On a également vu qu'il y'a un cas d'égalité si et seulement si $\dfrac{l_1}{L_1} = \cdots = \dfrac{l_n}{L_n}$, c'est-à-dire si et seulement si $P(a, b)$ et $P(c, d)$ sont images l'un de l'autre par une homothétie affine ou une translation.

1-b Construction de k, t et u : $P(a^{(1)}, b^{(1)})$ et $P(a^{(2)}, b^{(2)})$ sont d'intérieurs disjoints donc il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$]a_k^{(1)}, b_k^{(1)}[\cap]a_k^{(2)}, b_k^{(2)}[= \emptyset.$$

Cet entier vérifie les propriétés requises pour le choix du réel $t = \min(b_k^{(1)}, b_k^{(2)})$.

Par ailleurs à l'aide du théorème de Fubini, on vérifie la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $s \mapsto \operatorname{vol}(K_1 \cap \{x_k \leqslant s\})$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend surjectivement ses valeurs dans $[0, \operatorname{vol}(K_1)]$.
Alors un réel u tel que

$$\operatorname{vol}(K_1 \cap \{x_k \leqslant u\}) = \frac{\operatorname{vol}(K_1)\ \operatorname{vol}(K_0 \cap \{x_k \leqslant t\})}{\operatorname{vol}(K_0)} \in [0,\ \operatorname{vol}(K_1)]$$

vérifie les propriétés requises.

1-c Fin de la récurrence : Posons $K_0^- = K_0 \cap \{x_k \leqslant t\}$, $K_0^+ = K_0 \cap \{x_k \geqslant t\}$, $K_1^- = K_1 \cap \{x_k \leqslant u\}$ et $K_1^+ = K_1 \cap \{x_k \geqslant u\}$.

Commençons par remarquer les inclusions

$$K_0^- + K_1^- \subset K_0 + K_1 \quad \text{ et } \quad K_0^+ + K_1^+ \subset K_0 + K_1.$$

$(K_0^- + K_1^-) \cap (K_0^+ + K_1^+)$ étant contenu dans l'hyperplan $x_k = t + u$ est négligeable.
On en déduit

$$\operatorname{vol}(K_0 + K_1) \geqslant \operatorname{vol}(K_0^- + K_1^-) + \operatorname{vol}(K_0^+ + K_1^+).$$

Les parallélépipèdes rectangles constituant $K_0^- \cup K_1^-$ et $K_0^+ \cup K_1^+$ sont d'intérieurs disjoints et, par construction de k, en nombre $< n_0 + n_1$.
L'hypothèse de récurrence permet alors d'écrire

$$\operatorname{vol}(K_0^- + K_1^-)^{\frac{1}{n}} \geqslant \operatorname{vol}(K_0^-)^{\frac{1}{n}} + \operatorname{vol}(K_1^-)^{\frac{1}{n}}$$
$$\operatorname{vol}(K_0^+ + K_1^+)^{\frac{1}{n}} \geqslant \operatorname{vol}(K_0^+)^{\frac{1}{n}} + \operatorname{vol}(K_1^+)^{\frac{1}{n}}$$

ce qui fournit successivement, compte tenu de la définition de u

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(K_0+K_1) &\geqslant (\ \operatorname{vol}(K_0^-)^{\frac{1}{n}} +\ \operatorname{vol}(K_1^-)^{\frac{1}{n}})^n + (\ \operatorname{vol}(K_0^+)^{\frac{1}{n}} +\ \operatorname{vol}(K_1^+)^{\frac{1}{n}})^n \\ &= \ \operatorname{vol}(K_0^-)\left(1+\frac{\operatorname{vol}(K_1)^{\frac{1}{n}}}{\operatorname{vol}(K_0)^{\frac{1}{n}}}\right)^n +\ \operatorname{vol}(K_0^+)\left(1+\frac{\operatorname{vol}(K_1)^{\frac{1}{n}}}{\operatorname{vol}(K_0)^{\frac{1}{n}}}\right)^n \\ &= \left(\ \operatorname{vol}(K_0)^{\frac{1}{n}} +\ \operatorname{vol}(K_1)^{\frac{1}{n}}\right)^n\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Une union finie de parallélépipèdes rectangles pouvant s'écrire comme union de parallélépipèdes rectangles d'intérieurs disjoints, le résultat demeure encore dans ce dernier cas.

2 Théorème de Brunn-Minkowski : Montrons d'abord que le résultat vaut pour deux ouverts non vides bornés ω_0 et ω_1.

Ces deux ouverts sont union dénombrable de parallélépipèdes rectangles $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ce qui permet d'écrire

$$\operatorname{vol}(\omega_0) = \lim_{m\longrightarrow+\infty}\ \operatorname{vol}(\bigcup_{0\leqslant p\leqslant m} P_p) \quad \text{et} \quad \operatorname{vol}(\omega_1) = \lim_{m\longrightarrow+\infty}\ \operatorname{vol}(\bigcup_{0\leqslant p\leqslant m} Q_p).$$

La question précédente assure

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\bigcup_{0\leqslant p\leqslant m} P_p)^{\frac{1}{n}} +\ \operatorname{vol}(\bigcup_{0\leqslant p\leqslant m} Q_p)^{\frac{1}{n}} &\leqslant \left(\ \operatorname{vol}(\bigcup_{0\leqslant p\leqslant m} P_p) + (\bigcup_{0\leqslant p\leqslant m} Q_p)\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant\ \operatorname{vol}(\omega_0+\omega_1)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Le passage à la limite quand m tend vers $+\infty$ dans le membre de gauche fournit ce premier point.

Considérons deux compacts K_0 et K_1. Si l'un des deux est négligeable le résultat est clair, sinon introduisons les suites d'ouverts $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définies par

$$U_m = \{x\in\mathbb{R}^n\ ; d(x,K_0) < \frac{1}{2^m}\} \quad \text{et} \quad V_m = \{x\in\mathbb{R}^n\ ; d(x,K_1) < \frac{1}{2^m}\}.$$

On peut déjà écrire, pour tout $m\in\mathbb{N}$

$$\operatorname{vol}(K_0)^{\frac{1}{n}} +\ \operatorname{vol}(K_1)^{\frac{1}{n}} \leqslant\ \operatorname{vol}(U_m)^{\frac{1}{n}} +\ \operatorname{vol}(V_m)^{\frac{1}{n}} \leqslant\ \operatorname{vol}(U_m+V_m)^{\frac{1}{n}},$$

d'où

$$\operatorname{vol}(K_0)^{\frac{1}{n}} +\ \operatorname{vol}(K_1)^{\frac{1}{n}} \leqslant \inf_{m\in\mathbb{N}}\ \operatorname{vol}(U_m+V_m)^{\frac{1}{n}} =\ \operatorname{vol}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}(U_m+V_m)^{\frac{1}{n}}.$$

Remarquons alors la relation $K_0+K_1 = \displaystyle\bigcap_{m\in\mathbb{N}}(U_m+V_m)$.

L'inclusion directe étant triviale, considérons a un élément de $\displaystyle\bigcap_{m\in\mathbb{N}}(U_m+V_m)$.

Pour tout entier naturel m, on peut trouver $(x_m,y_m)\in U_m\times V_m$ tel que $a = x_m+y_m$. La suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on peut trouver une sous-suite $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge

vers un élément $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $(y_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $y = a - x$.
Comme on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$d(x_{m_k}, K_0) \leqslant \frac{1}{2^{m_k}} \quad \text{et} \quad d(y_{m_k}, K_1) \leqslant \frac{1}{2^{m_k}},$$

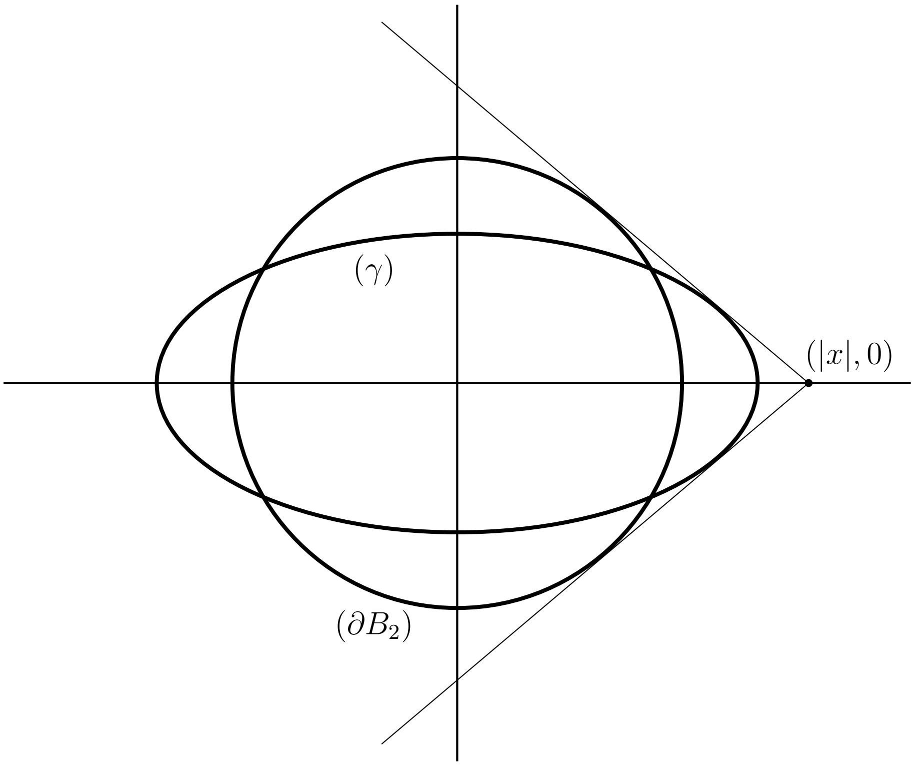
on en déduit $d(x, K_0) = 0$ et donc $x \in K_0$, puisque K_0 est fermé puis de même $y \in K_1$.
Il en résulte $a = x + y \in K_0 + K_1$ et par suite $K_0 + K_1 = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} (U_m + V_m)$.

En conclusion, on a établi

$$\mathrm{vol}(K_0)^{\frac{1}{n}} + \mathrm{vol}(K_1)^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{vol}(K_0 + K_1)^{\frac{1}{n}}.$$

Partie IV — Étude de la quantité vol(K)vol(K^*).

1-a $|x| \leqslant \sqrt{n}$: Menons une étude préliminaire dans le cas de la dimension deux.



L'enveloppe convexe de $\{B_2, \pm(|x|, 0)\}$ est contenue dans K. Pour $0 < b < 1 \leqslant a$, notons γ l'ellipse d'équation : $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$. Un petit raisonnement géométrique montre que la droite d'équation : $x_1 + \lambda x_2 = |x|$ est tangente à γ si et seulement si

$$a^2 + b^2\lambda^2 = x^2.$$

Cette même droite est alors tangente à ∂B_2 si et seulement si $1 + \lambda^2 = x^2$.
Une CNS pour que l'on puisse mener de $(|x|, 0)$ une droite qui soit tangente à γ et ∂B_2 est donc

$$x^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 - b^2}.$$

Des arguments de convexité dans chaque quadrant du plan permettent de déduire que dans ce cas γ est contenu dans l'enveloppe convexe de $\{B_2, \pm(|x|, 0)\}$ et par suite dans K.

Venons en au cas général. Choisissons les réels a et b précédents tels que la relation ci-dessus soit vérifiée et considérons l'ellipsoïde Γ d'équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{b^2} = 1.$$

Γ se déduisant de l'ellipse précédente par des rotations d'axe Ox_1, est de même contenu dans K.
Remarquons alors que $\mathrm{vol}(\Gamma) = ab^{n-1}V_n$. Il peut donc dépasser le volume de B_n dès que $ab^{n-1} > 1$, ou encore $a > b^{1-n}$, c'est-à-dire si

$$x^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 - b^2} > \frac{b^{2(1-n)} - b^2}{1 - b^2} = 1 + b^{-2} + b^{-4} + \cdots + b^{-2(n-1)}.$$

La somme géométrique minorante étant $> n$, un tel couple (a, b) peut être déterminé dès que $x^2 > n$, d'où le résultat.

1-b $\boldsymbol{E_K \subset K \subset \sqrt{n}E_K}$: E_K est l'image de B_n par un automorphisme linéaire donc on peut se ramener au cas $E_K = B_n$.

Par ailleurs, il nous faut établir que pour $\xi \in K$, on a $\|\xi\| \leqslant \sqrt{n}$. On peut choisir les axes du repère tel que ξ soit sur Ox_1 et se ramener au cas où $\xi = (x, 0, \cdots, 0)$.

Le résultat est une conséquence de la question précédente alors.

$\boldsymbol{\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*) \geqslant n^{-\frac{n}{2}}\ \mathrm{vol}(B_n)^2}$: L'utilisation des relations $E_K \subset K \subset \sqrt{n}E_K$ et $(\sqrt{n}E_K)^* \subset K^* \subset (E_K)^*$ fournit

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*) &\geqslant \ \mathrm{vol}(E_K)\ \mathrm{vol}((\sqrt{n}E_K)^*) \\
&= \ \mathrm{vol}(E_K)\frac{V_n^2}{\mathrm{vol}(\sqrt{n}E_K)} \\
&= n^{-\frac{n}{2}}V_n^2,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2-a Étude de la CNS demandée : Il semblerait que le choix d'une base orthonormale dans $H^\perp$ soit nécessaire pour mener à bien la suite du problème. Nous nous placerons dans ce cas désormais.

Montrons que la condition est nécessaire. Supposons donc $(\xi, \lambda) \in K^*$.
Pour tout $x \in K_0$, on peut écrire $\langle \xi, x \rangle = \langle (\xi, \lambda), (x, 0) \rangle \leqslant 1$, d'où $\xi \in (K_0)^*$.
Par ailleurs, fixons $t > 0$ dans I. Alors pour tout $x \in K_t$, on a

$$\langle (\xi, \lambda), (x, t) \rangle = \langle \xi, x \rangle + \lambda t \leqslant 1,$$

d'où en prenant la borne supérieure dans K_t, on obtient

$$1 - \varphi_\xi^K(t) + \lambda t \leqslant 1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lambda \leqslant \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t}.$$

Le passage à la borne inférieure sur $I \cap]0, +\infty[$ fournit alors

$$\lambda \leqslant \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t}.$$

L'inégalité

$$-\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \leqslant \lambda$$

s'établit de manière analogue.

Montrons que la condition est suffisante. Supposons donc les trois points précédents vérifiés pour $(\xi, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ et considérons $(x, t) \in K$.

- Si $t = 0$, alors $x \in K_0$ et donc $\langle(\xi, \lambda), (x, 0)\rangle = \langle \xi, x\rangle \leqslant 1$ puisque $\xi \in (K_0)^*$.

- Si $t > 0$, alors $\lambda \leqslant \dfrac{\varphi_\xi^K(t)}{t}$ et par suite

$$\langle(\xi, \lambda), (x, t)\rangle = \langle \xi, x\rangle + \lambda t \leqslant 1 - \varphi_\xi^K(t) + \lambda t \leqslant 1.$$

Le cas $t < 0$ se traite de façon analogue.

En conclusion $(\xi, \lambda) \in K^*$, ce qui établit le résultat.

2-b $\mathbf{vol}(K') \geqslant \mathbf{vol}(K)$: On peut déjà écrire

$$\mathrm{vol}(K') = \int_{K'} dx\ dt = \int_I \int_{\frac{1}{2}(K_t+K_{-t})} dx\ dt = \int_I \mathrm{vol}\left(\frac{1}{2}(K_t + K_{-t})\right)\ dt.$$

L'inégalité de Brunn-Minkowski donne, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}\left(\frac{1}{2}(K_t + K_{-t})\right)^{\frac{1}{n-1}} &= \frac{1}{2}\mathrm{vol}(K_t + K_{-t})^{\frac{1}{n-1}} \\
&\geqslant \frac{1}{2}(\mathrm{vol}(K_t)^{\frac{1}{n-1}} + \mathrm{vol}(K_{-t})^{\frac{1}{n-1}}) \\
&= \mathrm{vol}(K_t)^{\frac{1}{n-1}},
\end{aligned}$$

et par suite

$$\mathrm{vol}\left(\frac{1}{2}(K_t + K_{-t})\right) \geqslant \mathrm{vol}(K_t).$$

Il en résulte

$$\mathrm{vol}(K') \geqslant \int_I \mathrm{vol}(K_t)\ dt = \mathrm{vol}(K).$$

Étude du cas d'égalité : Par homothétie affine dans le cas d'égalité de l'inégalité de Brunn-Minkowski présentée dans la partie **III**, il faut comprendre homothétie *positive* affine, ce que nous ferons dans toute la suite.

Commençons par remarquer grâce à l'inégalité de Brunn-Minkowski que les fonctions $t \mapsto \mathrm{vol}\left(\frac{1}{2}(K_t + K_{-t})\right)^{\frac{1}{n-1}}$ et $t \mapsto \mathrm{vol}(K_t)^{\frac{1}{n-1}}$ sont concaves sur I donc continues sur l'intérieur de I. Le cas d'égalité se traduit donc par

$$\mathrm{vol}(K_t + K_{-t})^{\frac{1}{n-1}} = \mathrm{vol}(K_t)^{\frac{1}{n-1}} + \mathrm{vol}(K_{-t})^{\frac{1}{n-1}},$$

pour tout t intérieur à I, qui correspond au cas d'égalité dans Brunn-Minkowski.

Posons $I = [-a, a]$ et considérons x dans K_a. K étant O-symétrique, contient une boule ouverte B centrée à l'origine. Alors l'enveloppe convexe de $\{B, \pm(x, a)\}$

est contenue dans K, d'où à l'aide d'un dessin, on déduit que pour t intérieur à I, $K_t = -K_{-t}$ est d'intérieur non vide dans H. Il en résulte $\mathrm{vol}(K_t)\mathrm{vol}(K_{-t}) > 0$.

Alors d'après la propriété admise dans la partie **III**, pour tout t intérieur à I, il existe $\mu_t \in H$ et $\lambda_t > 0$ tels que $K_t = 2\mu_t + \lambda_t K_{-t}$. Le passage au volume dans cette égalité conduit à $\lambda_t = 1$, d'où le résultat souhaité.

2-c vol$((K')^*)$ $\geqslant$vol(K^*) : La question **IV-2-a** donne

$$\mathrm{vol}(K^*) = \int_{K^*} d\lambda\, d\xi = \int_{(K_0)^*} \int_{-\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t}}^{\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t}} d\lambda \;\; d\xi,$$

d'où on obtient, en notant que $K_0 = (K')_0$

$$\mathrm{vol}(K^*) = \int_{((K')_0)^*} \left(\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \right) \, d\xi.$$

Fixons ξ dans $((K')_0)^*$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} &\leqslant \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t) + \varphi_\xi^K(-t)}{t} \\
&= \inf_{t>0} \frac{2 - (\sup_{x \in K_t} \langle \xi, x\rangle + \sup_{y \in K_{-t}} \langle \xi, y\rangle)}{t} \\
&= \inf_{t>0} \frac{2 - \sup_{(x,y) \in K_t \times K_{-t}} \langle \xi, x+y\rangle}{t},
\end{aligned}$$

soit encore

$$\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \leqslant \inf_{t>0} \frac{1 - \sup_{z \in \frac{1}{2}(K_t + K_{-t})} \langle \xi, z\rangle}{t/2} = \inf_{t>0} \frac{2\varphi_\xi^{K'}(t)}{t}.$$

Il en résulte

$$\mathrm{vol}(K^*) \leqslant \int_{((K')_0)^*} \inf_{t>0} \frac{2\varphi_\xi^{K'}(t)}{t} \, d\xi = \mathrm{vol}((K')^*).$$

Existence de $\boldsymbol{\mu_t}$: K maximisant la quantité $\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*)$ sur les corps convexes compacts O-symétriques, l'étude qui précède conduit à $\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K')$.

Le résultat est alors une simple conséquence du cas d'égalité vu précédemment.

2-d Existence de $\boldsymbol{\mu_\xi}$: De ce qui précède, on déduit également $\mathrm{vol}(K^*) = \mathrm{vol}((K')^*)$.

K_0 est un corps convexe O-symétrique de H donc il en est de même pour $(K_0)^*$. L'intérieur de $(K_0)^*$ s'écrit

$$\Omega = \{\xi \in H \,; j_{(K_0)^*}(\xi) < 1\} = \{\xi \in H \,; \varphi_\xi^K(0) > 0\}.$$

Pour $\xi \in \Omega$ et $t > 0$ dans I, on peut écrire

$$\frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} \geqslant (\varphi_\xi^K)'_d(0) + \frac{\varphi_\xi^K(0)}{t} \geqslant (\varphi_\xi^K)'_d(0).$$

On en déduit que la fonction
$$\xi \mapsto \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t}$$
est définie concave sur l'ouvert convexe Ω donc est continue sur Ω.
On a un résultat analogue pour les fonctions

$$\xi \mapsto \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} \quad \text{et} \quad \xi \mapsto \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)+\varphi_\xi^K(-t)}{t}.$$

Les inégalités établies en **IV-2-c** sont alors des égalités sur Ω, égalités qui sont triviales sur
$$\partial((K_0)^*) = \{\xi \in H\ ; \varphi_\xi^K(0) = 0\}$$
puisque dans ce cas chaque membre vaut

$$(\varphi_\xi^K)'_d(0) - (\varphi_\xi^K)'_g(0),$$

d'où on a sur $(K_0)^*$

$$\inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(-t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{\varphi_\xi^K(t)+\varphi_\xi^K(-t)}{t}.$$

Nous utiliserons alors le

Lemme : Soit $\phi :]0,a[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction convexe et* $\theta \in]0,a[$.
Alors si $\phi(\theta) = \theta\phi'_d(\theta)$, *la fonction*

$$\Phi : t \mapsto \frac{\phi(t)}{t}$$

présente un minimum en θ.

Démonstration : On peut écrire sur $]0,a[$

$$\Phi'_d(t) = \frac{t\phi'_d(t) - \phi(t)}{t^2} = \frac{\psi(t)}{t^2}.$$

ϕ est convexe donc ψ est croissante sur $]0,a[$ (classique), d'où les hypothèses conduisent à
$$\begin{cases} \Phi'_d(t) \leqslant 0 & \text{pour } t \leqslant \theta \\ \Phi'_d(t) \geqslant 0 & \text{pour } t \geqslant \theta \end{cases}$$
et donc au résultat du Lemme.
Remarque : Rappelons qu'une fonction numérique à dérivée à droite $\geqslant 0$ sur un intervalle ouvert est croissante.

On a bien évidemment $\mu_0 = 0$.
Considérons $\xi \in H$ non nul puis les fonctions $f = 1 - \varphi_\xi^K$ et $g : t \mapsto f(-t)$.
Pour tout $\lambda \geqslant j_{(K_0)^*}(\xi) = f(0)$, l'élément $\lambda^{-1}\xi$ est dans $(K_0)^*$ ce qui fournit

$$\inf_{t>0} \frac{1-\lambda^{-1}f(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{1-\lambda^{-1}g(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{2-\lambda^{-1}f(t)-\lambda^{-1}g(t)}{t}$$

c'est-à-dire :

$$\forall\, \lambda \geqslant f(0), \quad \inf_{t>0} \frac{\lambda - f(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\lambda - g(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{2\lambda - f(t) - g(t)}{t}\cdot$$

Fixons alors un élément $s > 0$ dans l'intérieur de I.
Les fonctions

$$t \mapsto \lambda - f(t), \quad t \mapsto \lambda - g(t), \quad t \mapsto 2\lambda - f(t) - g(t)$$

sont convexes et le Lemme permet de voir que pour le choix de

$$\lambda = \frac{1}{2}(f(s) + g(s) - s(f'_d(s) + g'_d(s)) \geqslant f(0),$$

la fonction

$$t \mapsto \frac{2\lambda - f(t) - g(t)}{t}$$

admet un minimum en s.
La relation

$$\inf_{t>0} \frac{\lambda - f(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\lambda - g(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{2\lambda - f(t) - g(t)}{t}\cdot$$

s'écrit alors

$$\inf_{t>0} \frac{\lambda - f(t)}{t} + \inf_{t>0} \frac{\lambda - g(t)}{t} = \frac{2\lambda - f(s) - g(s)}{s}\cdot$$

et montre que

$$t \mapsto \frac{\lambda - f(t)}{t} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{\lambda - g(t)}{t}$$

admettent un minimum en s.
Donc les dérivées à droite en s de ces deux dernières fonctions sont $\geqslant 0$, ce qui s'écrit

$$-sf'_d(s) + f(s) - \lambda \geqslant 0 \quad \text{et} \quad -sg'_d(s) + g(s) - \lambda \geqslant 0.$$

Comme les membres de gauche de ces inégalités sont de somme nulle, il vient

$$-sf'_d(s) + f(s) = -sg'_d(s) + g(s) = \lambda.$$

En résumé, on a pour tout $s > 0$ intérieur à I

$$-sf'_d(s) + f(s) = -sg'_d(s) + g(s)$$

et donc

$$\left(\frac{f-g}{s}\right)'_d = 0,$$

d'où l'existence de $\mu_\xi \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(s) - g(s) = \varphi_\xi^K(-s) - \varphi_\xi^K(s) = \mu_\xi s,$$

pour tout $s > 0$ intérieur à I.

2-e Existence de s : En conservant les notations de **IV-2-b**, on vérifie aisément la relation, pour tout t intérieur à I

$$\varphi_\xi^K(-t) - \varphi_\xi^K(t) = \langle \xi, 2\mu_t \rangle.$$

L'identité établie en **IV-2-d** étant en fait valable pour tout t intérieur à I, on a :

$$\forall\, \xi \in H, \quad \langle \xi, 2\mu_t \rangle = \mu_\xi t.$$

L'application $\xi \mapsto \mu_\xi$ est donc une forme linéaire sur H d'où l'existence de $\mu \in H$ tel que :

$$\forall\, \xi \in H, \quad \langle \xi, 2\mu \rangle = \mu_\xi$$

et donc $\mu_t = t\mu$, pour tout t intérieur à I. Par ailleurs si a est l'une des bornes de I et $x \in K_a$, l'élément $x' = (2\mu a - x, a)$ est dans K car adhérent à $[0, x'[\subset K$.

On en déduit que la relation $\mu_t = t\mu$ vaut pour tout t dans I et que la transformation de $\mathbb{R}^n$, $s : (x,t) \mapsto (x - 2\mu t, -t)$ est une symétrie par rapport à H qui laisse K globalement invariant, d'où le résultat.

2-f *K* est un ellipsoïde : L'identité établie en **I-2** permet de voir que l'action d'un automorphisme sur K ne change pas la valeur de $\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*)$.
On peut alors se ramener au cas où $E_K = B_n$ et $q_K = \|\ \|^2$.

La question **II-4-a** permet alors de déduire que la symétrie s précédente est une réflexion. Cette propriété étant indépendante du choix de l'hyperplan H, il en résulte que K est laissé stable par toutes les réflexions de $\mathbb{R}^n$ et par suite est une boule euclidienne centrée à l'origine.

En conclusion K est un ellipsoïde, d'où $\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*) = V_n^2$.

3- Conclusion : D'abord signalons que la propriété de compacité admise est erronée. Il suffit de prendre par exemple $(a,b) = (0,1)$ pour vérifier que l'ensemble proposée n'est pas bornée.

Il semblerait que ce soit l'ensemble

$$\{K' \in \mathcal{C}\ ; e^a K \subset K' \subset e^b K\}$$

qui est compact, pour $a \leqslant b$ réels, hypothèse que nous ferons dans la suite.

D'abord contrôlons la continuité sur $\mathcal{C}$ de $\Phi : K \mapsto \mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(K^*)$.
Raisonnons séquentiellement dans $\mathcal{C}$. Considérons une suite $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de limite K.
On a immédiatement, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$e^{-d(K_p,K)}K \subset K_p \subset e^{d(K_p,K)}K \quad \text{puis} \quad e^{-d(K_p,K)}K^* \subset (K_p)^* \subset e^{d(K_p,K)}K^*.$$

Par passage au volume, on en déduit

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} \mathrm{vol}(K_p) = \mathrm{vol}(K) \quad \text{puis} \quad \lim_{p\longrightarrow\infty} \mathrm{vol}((K_p)^*) = \mathrm{vol}(K^*),$$

d'où ce premier point.

Montrons que l'application Φ est majorée. Fixons K un élément de $\mathcal{C}$.
On a $E_K \subset K \subset \sqrt{n}E_K$ donc $K^* \subset (E_K)^*$ et par suite

$$\Phi(K) \leqslant \mathrm{vol}(\sqrt{n}E_K)\mathrm{vol}((E_K)^*) = n^{\frac{n}{2}} V_n^2,$$

d'où ce second point.

Montrons enfin que la borne supérieure $\sup\limits_{K\in\mathcal{C}} \Phi(K)$ est atteinte.

Fixons K dans $\mathcal{C}$. Pour tout automorphisme linéaire A, on a $\Phi(A(K)) = \Phi(K)$.
Choisissons alors A de telle façon à avoir $E_{A(K)} = B_n$. On peut écrire

$$B_n \subset A(K) \subset \sqrt{n}B_n,$$

d'où on en déduit
$$\sup_{K' \in \mathcal{C}} \Phi(K') = \sup_{B_n \subset K' \subset \sqrt{n} B_n} \Phi(K').$$
D'après l'hypothèse admise, la borne de droite est prise sur un ensemble compact. Φ étant continue, elle atteint son maximum, d'où ce dernier point.

L'étude du cas maximal a montré que celui-ci est atteint pour des ellipsoïdes, d'où les inégalités annoncées.