**Corrigé**

# 1 Introduction

1. • $d_\gamma$ est bien définie car le rapport est borné par $2\gamma$, en remarquant que :
$$\frac{|\psi(x)-\varphi(x)|}{|x|}\leqslant\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{|x|}+\frac{|\psi(x)-\psi(0)|}{|x|}\leqslant 2\gamma.$$
   • Si $d_\gamma(\varphi,\psi)=0$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\psi(x)$ donc $\varphi=\psi$.
   • La symétrie est évidente.
   • Si $\varphi$, $\psi$, $\theta$ sont trois éléments de $Li_\gamma$ :
   $\forall x\in\ \mathbb{R}^*, \left|\frac{\theta(x)-\varphi(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\theta(x)-\psi(x)}{x}\right|+\left|\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{x}\right|\leqslant d_\gamma(\theta,\psi)+d_\gamma(\psi,\varphi)$
   donc $d_\gamma(\theta,\varphi)\leqslant d_\gamma(\theta,\psi)+d_\gamma(\psi,\varphi)$.
   $\boxed{d_\gamma \text{ est une distance sur } Li_\gamma}$.
2. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(Li_\gamma, d)$. Alors :
$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\ \mathbb{N}, \forall n\geqslant p\geqslant N, d_\gamma(\varphi_n,\varphi_p)\leqslant\varepsilon. \tag{1}$$
   Pour $x\neq 0$ fixé, on a donc : $\forall n\geqslant p\geqslant N, |\varphi_n(x)-\varphi_p(x)|\leqslant\varepsilon\,|x|$.
   Ainsi, $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ : elle converge vers une limite $\varphi(x)$.
   Comme $\varphi_n$ appartient à $Li_\gamma$ : $\forall n\in\mathbb{N}, \varphi_n(0)=0$, donc $(\varphi_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(0)=0$ et $\forall(x,y)\in\ \mathbb{R}^2, |\varphi_n(x)-\varphi_n(y)|\leqslant\gamma\,|x-y|$ donc $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\gamma\,|x-y|$.
   Ainsi, $\varphi$ est encore élément de $Li_\gamma$.
   En passant à la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ dans (1) :
$$\forall x\in\ \mathbb{R}\setminus\{0\}, \forall p\geqslant\ N, \left|\frac{\varphi(x)-\varphi_p(x)}{x}\right|\leqslant\varepsilon \text{ donc } \forall p\geqslant N, d_\gamma(\varphi_p,\varphi)\leqslant\varepsilon.$$
   Ainsi, la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi$ dans $(Li_\gamma, d_\gamma)$ : $\boxed{(Li_\gamma, d_\gamma) \text{ est complet}}$.
3. (a) Soit $x$, $y$ des réels tels que $x<y$. Alors :
$$G_\varphi(y)-G_\varphi(x)=\mu(y-x)+h(y,\varphi(y))-h(x,\varphi(x)).$$
   On remarque que : $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\gamma\,|x-y|$ donc $|(y,\varphi(y))-(x,\varphi(x))|\leqslant(1+\gamma)\,|x-y|$.
   D'après l'inégalité des accroissements finis :
$$|h(y,\varphi(y))-h(x,\varphi(x))|\leqslant|h|_{C^1}\,|(y,\varphi(y))-(x,\varphi(x))|\leqslant\ |h|_{C^1}\,(1+\gamma)\,|y-x|<\mu\,|y-x|$$
   donc $G_\varphi(y)-G_\varphi(x)>0$ : $\boxed{G_\varphi \text{ est strictement croissante}}$.

   (b) $G_\varphi$ est continue strictement croissante donc définit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty}G_\varphi(x), \lim\limits_{x\to+\infty}G_\varphi(x)\right[$.
   Or, comme ci-dessus, pour $x>0$ : $G_\varphi(x)-G_\varphi(0)\geqslant(\mu-(1+\gamma)\,|h|_{C^1})\,x \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}G_\varphi(x)=+\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}G_\varphi(x)=-\infty$.
   Ainsi $\boxed{G_\varphi \text{ est un homéomorphisme de } \mathbb{R}}$.

## 2 Partie linéaire

1. Le polynôme caractéristique de $A$ est scindé dans $\mathbb{C}$, donc il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ de $\mathbb{C}^k$ dans laquelle la matrice de $A$ prend la forme d'une réduite de Jordan.
   En prenant la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ définie par $e_i = \varepsilon'^{i-1}e'_i$, $i \in [|1,k|]$, on peut faire en sorte que cette réduite contienne des $\varepsilon'$ au lieu de 1 au-dessus de la diagonale.
2. Soit $\varepsilon = \varepsilon'$, $\lambda_1$, …, $\lambda_k$ les termes diagonaux de la matrice, $N$ la norme infinie associée à la base $\mathcal{B}$. Alors $\|A\|_N \leqslant \max\{|\lambda_i| + \varepsilon', i \in [|1,k|]\} \leqslant r(A) + \varepsilon$.
   La restriction de $N$ à $\mathbb{R}^k$ est alors encore une norme sur $\mathbb{R}^k$, qui vérifie toujours
   $$\boxed{\|A\|_N \leqslant r(A) + \varepsilon}.$$
   *Deuxième méthode pour 2.1 et 2.2*
   Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres complexes, éventuellement confondues, de $A$, rangées de façon à ce que :
   $$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_k|.$$
   Comme le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$, il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ dans laquelle la matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ de $A$ est triangulaire supérieure.
   Soit $K = \max\{|a_{i,j}|\,;i\neq j\}$ et $\alpha$ un réel strictement positif tel que $0 < \dfrac{K}{\alpha - 1} \leqslant \varepsilon$.
   Soit, pour tout vecteur $x$ de $\mathbb{C}^k$ de coordonnées $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ dans $\mathcal{B}$ : $N(x) = \max\left\{\left|\alpha^i x_i\right|; i \in [|1,k|]\right\}$.
   $A(x) = y$ est un vecteur de coordonnées $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ dans $\mathcal{B}$ telles que :
   $$y_i = \lambda_i x_i + \sum_{j=i+1}^{k} a_{i,j}x_j$$
   donc $\left|\alpha^i y_i\right| \leqslant |\lambda_i| \left|\alpha^i x_i\right| + \displaystyle\sum_{j=i+1}^{k} K\frac{\alpha^i}{\alpha^j}\left|\alpha^j x_j\right|$ d'où
   $$\left|\alpha^i y_i\right| \leqslant r(A)N(x) + K\left(\sum_{j=i+1}^{k}\alpha^{i-j}\right)N(x) \leqslant r(A)N(x) + K\left(\sum_{j=1}^{k-i}\alpha^{-j}\right)N(x) \leqslant \left(r(A) + \frac{K}{\alpha-1}\right)N(x)$$
   et comme ceci est valable pour tout $i \in [|1,k|]$ :
   $$N(y) \leqslant (r(A)+\varepsilon)N(x) \text{ donc } \|A\|_N \leqslant r(A) + \varepsilon$$
   en notant $\|\cdot\|_N$ la norme sur $\mathrm{End}(\mathbb{C}^k)$ subordonnée à la norme $N$ sur $\mathbb{C}^k$.
   Il ne reste qu'à restreindre à $\mathbb{R}^k$.
3. Comme $\mathbb{R}^k$ est de dimension finie, $\|\cdot\|$ est équivalente à $N$.
   Il existe donc $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :
   $$\forall v \in \mathbb{R}^k, \alpha N(v) \leqslant \|v\| \leqslant \beta N(v).$$
   Alors, pour tout $v \in \mathbb{R}^k$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
   $$\|A^n v\| \leqslant \beta N(A^n v) \leqslant \beta \|A\|_N^n N(v) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}(r(A)+\varepsilon)^n \|v\|.$$
   Ainsi : $\boxed{\forall v \in \mathbb{R}^k, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|A^n v\| \leqslant C_\varepsilon (r(A)+\varepsilon)^n \|v\|}$ en posant $\boxed{C_\varepsilon = \dfrac{\beta}{\alpha}}$.

4. Soit $P$ le polynôme caractéristique de $A$. Comme $A$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^k$, il s'agit d'un polynôme à coefficients réels. $P$ est scindé sur $\mathbb{C}$, et ses racines sont réelles ou complexes conjuguées deux à deux, de modules différents de 1. On peut donc décomposer $P$ sous la forme $P = QR$, où $Q$ (resp. $R$) n'a que des racines de module strictement supérieur (resp. inférieur) à 1. Comme les racines complexes non réelles sont conjuguées deux à deux, $Q$ et $R$ sont encore des polynômes à coefficients réels.
$Q$ et $R$ sont premiers entre eux, donc le lemme des noyaux assure que :
$$\mathrm{Ker}Q(A) \oplus \mathrm{Ker}R(A) = \mathrm{Ker}P(A) = \mathbb{R}^k.$$
Soit $\boxed{E^+ = \mathrm{Ker}Q(A) \text{ et } E^- = \mathrm{Ker}R(A)}$.
$E^+$ et $E^-$ sont bien stables par $A$ et supplémentaires dans $\mathbb{R}^k$.
Les valeurs propres de $A_{|E^+}$ (resp. $A_{|E^-}$) sont les racines de $Q$ (resp. $R$), donc sont de modules strictement supérieurs (resp. inférieurs) à 1.
5. Comme toutes les valeurs propres de $A_{|E^+}$ sont de module strictement supérieur à 1, 0 n'est pas valeur propre de $A_{|E^+}$ donc $\boxed{A_{|E^+} \text{ est inversible}}$.
6. Les valeurs propres de $A_{|E^+}^{-1}$ sont les inverses des valeurs propres de $A_{|E^+}$, donc sont toutes de module strictement inférieur à 1. Ainsi :
$$r\left(A_{|E^+}^{-1}\right) < 1 \text{ et } r\left(A_{|E^-}\right) < 1.$$
Soit $\varepsilon > 0$ tel que $r\left(A_{|E^+}^{-1}\right) + \varepsilon < 1$ et $r\left(A_{|E^-}\right) + \varepsilon < 1$.
D'après 2.2, il existe sur $E^+$ et $E^-$ des normes $N_+$ et $N_-$ adaptées telles que, pour les normes subordonnées :
$$\left\|A_{|E^+}^{-1}\right\| \leqslant r\left(A_{|E^+}^{-1}\right) + \varepsilon < 1 \text{ et } \left\|A_{|E^-}\right\| \leqslant r\left(A_{|E^-}\right) + \varepsilon < 1.$$
La norme $\|\cdot\|$ définie sur $\mathbb{R}^k$ par :
$\|x\| = \max\left(N_+(x^+), N_-(x^-)\right)$ si $x$ admet la décomposition $x^+ + x^-$ dans $E^+ \oplus E^-$
est alors bien une norme sur $\mathbb{R}^k$, et vérifie les conditions imposées.
7. On remarque que, pour tout $v \in E^-$ :
$$\|A^n(v)\| \leqslant \left\|A_{|E^-}\right\|^n \|v\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \text{ car } \left\|A_{|E^-}\right\| < 1$$
donc $\boxed{\text{la suite } (A^n(v))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.
8. Soit $v \in E^+ \setminus \{0\}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $v_n = A^n(v)$.
Alors $\|v\| = \left\|\left(A_{|E^+}^{-1}\right)^n (v_n)\right\| \leqslant \left\|A_{|E^+}^{-1}\right\|^n \|v_n\|$ donc $\|v_n\| \geqslant \dfrac{1}{\left\|A_{|E^+}^{-1}\right\|^n} \|v\|$.
Comme $\left\|A_{|E^+}^{-1}\right\| < 1$, $\dfrac{1}{\left\|A_{|E^+}^{-1}\right\|^n}$ tend vers $+\infty$ et $\|v\|$ est non nulle, donc $\boxed{(\|A^n(v)\|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty}$.

## 3 Linéarité et topologie

1. Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$.
   - Soit $L \in E$, $\ell$ sa matrice dans la base canonique. Chaque $e_i$ est un élément de $\mathbb{Z}^k$, donc $L(e_i)$ appartient à $\mathbb{Z}^k$, donc les coefficients de la $i$-ème colonne de $\ell$ sont dans $\mathbb{Z}$.
   Ainsi, $\ell$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

- Réciproquement, soit $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$, dont la matrice $\ell$ dans la base canonique est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{Z}^k$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_k$ dans $\mathcal{B}$, $L(x)$ a pour coordonnées $y_1, \ldots, y_k$ dans $\mathcal{B}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Tous les coefficients $y_i$ sont donc dans $\mathbb{Z}$ : $L(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et $L \in E$.

$\boxed{\text{$L$ appartient donc à $E$ si et seulement si sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.}}$

2. Soit $L \in E$, $\ell$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$. $L$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $L^{-1}$ appartient à $E$, i.e. si et seulement si $\ell^{-1}$ est à coefficients entiers.
Or $\ell^{-1} = \dfrac{1}{\det \ell} {}^t\mathrm{Com}\,(\ell)$ et $\mathrm{Com}\,(\ell)$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (car ses coefficients sont des déterminants à coefficients dans $\mathbb{Z}$).
Ainsi, si $\det \ell$ vaut $+1$ ou $-1$, $\ell^{-1}$ est à coefficients entiers, donc $L$ appartient à $\mathcal{E}$.
Si $L$ appartient à $\mathcal{E}$, $\ell$ et $\ell^{-1}$ sont à coefficients entiers, donc $\det \ell$ et $\det \ell^{-1}$ sont des entiers tels que :
$$1 = \det I_k = (\det \ell).(\det \ell^{-1}).$$
Ainsi, $\det \ell = \det L$ est égal à $+1$ ou $-1$.
$\boxed{\text{$L \in E$ est donc un élément de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\det L$ vaut $+1$ ou $-1$}}$.

3. - La matrice de $L$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ est : $\ell = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Son polynôme caractéristique est :
   $$P = (2 - X)(1 - X) - 1 = X^2 - 3X + 1 = \left(X - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right).$$
   Les deux valeurs propres, $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$, sont donc de module différent de 1 : $\boxed{\text{$L$ est hyperbolique.}}$
   - $\ell$ est à coefficients entiers et $\det \ell$ vaut 1, donc $\boxed{L \in \mathcal{E}}$.
   - Sur $\mathbb{R}$, $L$ ne peut être que de la forme $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{R}$.
   Pour qu'il soit de déterminant $+1$ ou $-1$, il faudrait que $a$ vaille $+1$ ou $-1$. Mais $a$ est aussi l'unique valeur propre de $L$, donc $L$ ne peut pas être hyperbolique dans ce cas. $\boxed{\text{Il n'existe pas d'exemple comparable sur $\mathbb{R}$}}$.

4. - Soit $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Q}^k \cap [0, 1]^k$.
   En mettant tous les $x_i$ au même dénominateur, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(p_1, \ldots, p_k) \in [|0, q|]^k$ tels que :
   $$\forall i \in [|1, k|]\,, x_i = \frac{p_i}{q}.$$
   Soit $y = (p_1, \ldots, p_k)$ donc $x = \dfrac{1}{q} y$.

Comme $L(\mathbb{Z})$ est contenu dans $\mathbb{Z}$, $L^p(x)$ est, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, de la forme $z = \dfrac{1}{q}(z_1, \ldots, z_k)$, avec $z_i \in \mathbb{Z}$.
Le reste modulo $q$ de $z_i$ ne peut prendre que $q$ valeurs (de 0 à $q-1$), donc les projetés par $\Pi$ des $L^p(x)$, $p \in \mathbb{N}$, ne peuvent prendre que $q^k$ valeurs distinctes. Ainsi, il existe deux entiers $i < j$ tels que :

$$\Pi\left(L^i(x)\right) = \Pi\left(L^j(x)\right) \text{ donc } L^j(x) - L^i(x) \in \mathbb{Z}^k.$$

De plus $L^{-1}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ donc $L^{j-i}(x) - x = L^{-i}\left(L^j(x) - L^i(x)\right) \in \mathbb{Z}^k$
ce qui montre que $x$ est périodique.

- Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Per} L$.
Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $L^p(x) - x = y$ soit élément de $\mathbb{Z}^k$.
$L$ est hyperbolique, donc n'a aucune valeur propre de module 1 ; ainsi $L^p - Id_{\mathbb{R}^k}$ est inversible et :
$$x = \left(L^p - Id_{\mathbb{R}^k}\right)^{-1}(y).$$
De plus, la matrice $\ell$ de $L$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ est à coefficients entiers, donc la matrice $\dfrac{1}{\det\left(\ell^p - I_k\right)}{}^t\mathrm{Com}\left(\ell^p - I_k\right)$ de $\left(L^p - Id_{\mathbb{R}^k}\right)^{-1}$ est à coefficients rationnels, et comme $y$ est à coordonnées entières, $x$ est à coordonnées rationnelles : $x \in \mathbb{Q}^k \cap [0,1]^k$.

Ainsi $\boxed{\operatorname{Per} L = \mathbb{Q}^k \cap [0,1]^k}$ et comme $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est dense dans $[0,1]$, $\boxed{\operatorname{Per} L \text{ est dense dans } [0,1]^k}$.

5. Comme toutes les normes sont équivalentes, on peut choisir une norme quelconque, et cela donnera la topologie usuelle. On prend donc une norme $L$-adaptée $\|\cdot\|$ comme en 2.6.
Soit $x \in \mathbb{R}^k$. Comme $\mathbb{R}^k = E^+ \oplus E^-$, il existe $(x^+, x^-) \in E^+ \times E^-$ tel que :
$$x - a = x^+ + x^-.$$
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, L^n(x) - L^n(a) = L^n(x-a) = L^n(x^+) + L^n(x^-)$.
On sait (cf. 2.7 et 2.8) que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, $L^n(x^-)$ tend vers 0 et $\left\|L^n(x^+)\right\|$ tend vers $+\infty$ si $x^+$ est non nul.
Ainsi, $x$ appartient à $W_a^s$ si et seulement si $x^+$ est nul, i.e. si et seulement si $x-a$ appartient à $E^-$ : $\boxed{W_a^s = a + E^-}$.
On remarque que, par définition, la variété instable de $a$ pour $L$ est la variété stable de $a$ pour $L^{-1}$. Passer de $L$ à $L^{-1}$ revient à échanger $E^+$ et $E^-$ donc $\boxed{W_a^u = a + E^+}$.

6. (a) Soit $z_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\alpha = N(z_0)$ et $\eta = \inf\limits_{z \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}} N(z)$.
Comme $N$ est une norme, $\alpha$ est non nul.
Soit $B = \left\{z \in \mathbb{R}^k \mid N(z) \leqslant \alpha\right\}$ : $B$ est un compact de $\mathbb{R}^k$.
Par définition $\eta = \inf\left\{N(z); z \in B \cap \left(\mathbb{Z}^k \setminus \{0\}\right)\right\}$. $B \cap \left(\mathbb{Z}^k \setminus \{0\}\right)$ est un fermé dans $B$, donc un compact de $\mathbb{R}^k$.
$N$, qui est une application continue sur $\mathbb{R}^k$, atteint ses bornes sur ce compact.
En particulier, $\eta$ est atteint en un point non nul, donc
$$\boxed{\eta = \inf_{z \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}} N(z) \text{ est strictement positif}}.$$

(b) • $d$ est bien une application à valeurs positives.
  • Soit $(y, y') \in (\mathbb{T}^k)^2$ tel que $d(y, y') = 0$.
  Si $x$ et $x'$ sont des représentants dans $\mathbb{R}^k$ de $y$ et $y'$ respectivement, $x - x'$ appartient à $\mathbb{Z}^k$.
  $d(y, y') = 0$ impose qu'il existe des représentants $x$ et $x'$ tels que $x - x' = 0$ donc $y = y'$.
  • La définition de $d$ est visiblement symétrique.
  • On remarque que $d$ peut aussi être définie par :

$$d(y, y') = \inf \left\{ N(z) \mid z \in \mathbb{R}^k \text{ et } \Pi(z) = y - y' \right\}.$$

  Soit $y$, $y'$, $y''$ des éléments de $\mathbb{T}^k$. Alors, pour tous représentants $x_1$ et $x_2$ de $y - y'$ et $y' - y''$ respectivement, $x_1 + x_2$ est un représentant de $y - y''$ et :

$$d(y, y'') \leqslant N(x_1 + x_2) \leqslant N(x_1) + N(x_2).$$

  Pour tout $x_2$ représentant de $y' - y''$ :
  $N(x_2) \geqslant d(y, y'') - N(x_1)$ donc $d(y', y'') \geqslant d(y, y'') - N(x_1)$
  puis, pour tout $x_1$ représentant de $y - y'$ :
  $N(x_1) \geqslant d(y, y'') - d(y', y'')$ donc $d(y, y') \geqslant d(y, y'') - d(y', y'')$.
  Finalement : $d(y, y'') \leqslant d(y, y') + d(y', y'')$ et $\boxed{d \text{ est une distance sur } \mathbb{T}^k}$.

(c) Soit $(x, x') \in (\mathbb{R}^k)^2$, $y = \Pi(x)$, $y' = \Pi(x')$. Par définition :
  $d(y, y') \leqslant N(x - x')$ donc $d\left(\Pi(x), \Pi(x')\right) \leqslant N(x - x')$.
  $\boxed{\Pi \text{ est 1-lipschitzienne donc continue}}$.

7. • Soit $y \in \mathbb{T}^k$, $x$ et $x'$ deux représentants de $y$ dans $\mathbb{R}^k$. Alors $x - x'$ appartient à $\mathbb{Z}^k$ donc $L(x - x') = L(x) - L(x')$ appartient à $\mathbb{Z}^k$ : $L$ induit bien une application $\Pi_L$ sur $\mathbb{T}^k$.
  • Par construction de $F_L$ : $F_L\left(\Pi(x)\right) = F_L(y) = \Pi\left(L(x)\right)$ donc $F_L \circ \Pi = \Pi \circ L$.
  • Soit $y \in \mathbb{T}^k$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{T}^k$ tendant vers $y$.
  Par définition de $d$, il existe un représentant $x$ de $y$ et une suite de représentants $x_n$ de $y_n$ tels que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ dans $\mathbb{R}^k$ pour $N$.
  Comme $L$ est continue, $\left(L(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L(x)$ dans $\mathbb{R}^k$, donc $\left(\Pi\left(L(x_n)\right) = F_L(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Pi\left(L(x)\right) = F_L(y)$. Ainsi, $F_L$ est continu.
  • Enfin, pour tout $y \in \mathbb{T}^k$ de représentant $x$ dans $\mathbb{R}^k$ :
  $$F_{L^{-1}}\left(F_L(y)\right) = F_{L^{-1}}\left(\Pi(L(x))\right) = \Pi\left(L^{-1}(L(x))\right) = \Pi(x) = y$$
  et de même pour $F_L \circ F_{L^{-1}}$, donc $F_L$ est bijective, de réciproque $F_{L^{-1}}$ également continue.
  $\boxed{F_L \text{ est un homéomorphisme.}}$

8. (a) Soit $y \in \Pi(0 + E^-)$ et $x \in E^-$ tel que $y = \Pi(x)$.
  On sait que $(L^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $(F_L^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathbb{T}^k$, i.e. $d(F_L^n(y), F_L^n(0))$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$ : $y$ appartient à $W^s(0)$.
  (b) Soit $y \in \mathbb{T}^k$ et $x \in [0,1]^k$ tel que $y = \Pi(x)$ ; soit $\varepsilon > 0$.
  Comme $\operatorname{Per} L$ est dense dans $[0,1]^k$, il existe $x_0 \in \operatorname{Per} L$ tel que :
  $$N(x - x_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ donc } d(y, y_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ en posant } y_0 = \Pi(x_0).$$
  Comme $\mathbb{R}^k = E^+ \oplus E^-$, il existe $(x^+, x^-) \in E^+ \times E^-$ tel que : $x_0 = x^+ + x^-$.
  Puisque $x_0$ est périodique, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $L^p(x_0) - x_0$ soit dans $\mathbb{Z}^k$.
  Alors $F_L^p(y_0) = y_0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $y_0 = F_L^{np}(y_0) = \Pi\left(L^{np}(x^+)\right) + \Pi\left(L^{np}(x^-)\right)$.

Comme $(L^{np}(x^-))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, $\left(z_n = \Pi\left(L^{np}(x^+)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $\Pi(0+E^+)$ qui converge vers $y_0$.

Pour $n$ suffisamment grand : $d(y_0, z_n) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ donc $d(y, z_n) \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $\boxed{\Pi(0+E^+) \text{ est dense dans } \mathbb{T}^k}$.

(c) En appliquant le résultat précédent à $L^{-1}$, on obtient que $\Pi(0+E^-)$ est dense dans $\mathbb{T}^k$ et donc que $\boxed{W^s(0) \text{ est dense dans } \mathbb{T}^k}$.
Grâce à $F_{L^{-1}}$ toujours, on en déduit que la variété instable de 0 est également dense dans $\mathbb{T}^k$.

9. Soit $f$ une isométrie de $\mathbb{T}^k$, supposée topologiquement mélangeante.
Soit $x$ et $y$ deux points distincts de $\mathbb{T}^k$, $\varepsilon = \dfrac{d(x,y)}{5} > 0$.
Soit $z \in \mathbb{T}^k$, $V$ la boule ouverte de centre $z$ de rayon $\varepsilon$, $U_1$ (resp. $U_2$) la boule ouverte de centre $x$ (resp. $y$) de rayon $\varepsilon$.
Comme $f$ est mélangeante, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geqslant N, f^n(U_1) \cap V \neq \varnothing \text{ et } f^n(U_2) \cap V \neq \varnothing.$$
Soit donc $z_1 \in f^n(U_1) \cap V$ et $z_2 \in f^n(U_2) \cap V$.
Il doit exister $t_1 \in U_1$ et $t_2 \in U_2$ tels que $z_1 = f^n(t_1)$ et $z_2 = f^n(t_2)$.
Comme $f$ est une isométrie, $d(t_1, t_2) = d(z_1, z_2)$ et $V$ est de diamètre $2\varepsilon$ donc :
$$d(x,y) \leqslant d(x,t_1) + d(z_1,z_2) + d(t_2,y) \leqslant 4\varepsilon$$
ce qui est absurde. Ainsi, $\boxed{\text{une isométrie de } \mathbb{T}^k \text{ n'est pas mélangeante}}$.

10. Soit $U$ et $V$ deux ouverts non vides de $\mathbb{T}^k$. Soit $x \in U$, $z \in V$, $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte de centre $z$ de rayon $\varepsilon$ soit contenue dans $V$.
$\Pi(0+E^+)$ est dense dans $\mathbb{T}^k$, donc il existe $z_0$ dans $\Pi(0+E^+) \cap B(z,\varepsilon)$.
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = F_L^{-n}(z_0)$ : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
$\Pi(0+E^-)$ est dense dans $\mathbb{T}^k$, donc il existe $t$ dans $\Pi(0+E^-) \cap U$.
Soit alors $v_n = t + u_n$. Comme $U$ est ouvert, $v_n$ appartient à $U$ pour $n$ suffisamment grand, et $F_L^n(v_n) = F_L^n(t) + z_0$ tend vers $z_0$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
Pour $n$ suffisamment grand, $F_L^n(v_n)$ appartient donc à $F_L^n(U) \cap V$. $\boxed{F_L \text{ est mélangeante}}$.

## 4 Un exemple presque linéaire dans $\mathbb{R}^2$

1. Soit $(x', y')$, $(u,v)$, $(u',v')$ des éléments de $\mathbb{R}^2$. On a :
$$F_{(x',y')}(u',v') - F_{(x',y')}(u,v) = \left(\frac{\alpha(u,v) - \alpha(u',v')}{\mu}, \frac{\beta(u,v) - \beta(u',v')}{\lambda}\right).$$
L'inégalité des accroissements finis donne : $\begin{cases} |\alpha(u,v) - \alpha(u',v')| \leqslant \delta\, |(u,v) - (u',v')| \\ |\beta(u,v) - \beta(u',v')| \leqslant \delta\, |(u,v) - (u',v')| \end{cases}$
donc $\left|F_{(x',y')}(u',v') - F_{(x',y')}(u,v)\right| \leqslant \dfrac{\delta}{\lambda}\, |(u,v) - (u',v')|$.
$F_{(x',y')}$ est donc lipschitzienne de rapport $a = \dfrac{\delta}{\lambda} < 1$.
Comme application contractante dans $\mathbb{R}^2$ complet, $F_{(x',y')}$ admet un unique point fixe $(u,v)$, solution de :

$$(u,v)=\left(\frac{x'-\alpha(u,v)}{\mu},\frac{y'-\beta(u,v)}{\lambda}\right),\text{ i.e. de }(x',y')=f(u,v).$$

Ceci étant valable pour tout couple $(x',y')$ de $\mathbb{R}^2$, $f$ est bijective (existence et unicité du point fixe, i.e. de l'antécédent).

$f$ est $\mathcal{C}^1$ comme composée d'applications $\mathcal{C}^1$.

Sa différentielle en $(x,y)$ a pour matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ :

$$M=\begin{pmatrix}\mu+\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial\beta}{\partial x}(x,y) & \lambda+\dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}.$$

Son jacobien est donc :

$$J(x,y)=\left(\mu+\frac{\partial\alpha}{\partial x}(x,y)\right)\left(\lambda+\frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)\right)-\frac{\partial\alpha}{\partial y}(x,y)\frac{\partial\beta}{\partial x}(x,y)\geqslant(\mu-\delta)\left(\lambda-\delta\right)-\delta^2$$

car toutes les dérivées partielles sont bornées par $\delta$.

De plus : $\delta<\dfrac{\lambda}{2}<\dfrac{\mu}{2}$ donc $J(x,y)\geqslant\dfrac{\mu}{2}\dfrac{\lambda}{2}-\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2>0$.

Ainsi, $f$ définit (localement ou globalement au choix vu qu'on a déjà l'injectivité) un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme, et comme on sait déjà que $f$ est bijective, $\boxed{f\text{ est un }\mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme de }\mathbb{R}^2}$.

2. On cherche $\psi$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\exists x'\in\mathbb{R},(\mu x+\alpha(x,\varphi(x)),\lambda\varphi(x)+\beta(x,\varphi(x))=(x',\psi(x')))$ ce qui est équivalent à : $\forall x\in\mathbb{R},\psi(G_\varphi(x))=\lambda\varphi(x)+\beta(x,\varphi(x)$.
(*) assure que $\delta(1+\gamma)<\mu$ donc, d'après 1.3, $G_\varphi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ ; il suffit de prendre l'application $\psi$ définie par :
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\psi(x)=\lambda\varphi\left(G_\varphi^{-1}(x)\right)+\beta\left(G_\varphi^{-1}(x),\varphi\left(G_\varphi^{-1}(x)\right)\right)}.$$
3. $G_\varphi(0)=0$ donc $G_\varphi^{-1}(0)=0$ et $\psi(0)=0$.
Soit $y$, $y'$ dans $\mathbb{R}$, $x=G_\varphi^{-1}(y)$ et $x'=G_\varphi^{-1}(y')$.
Comme $\varphi$ est $\gamma$-lipschitzienne : $|\varphi(x)-\varphi(x')|\leqslant\gamma\,|x-x'|$
et $\gamma<1$ donc $|(x,\varphi(x))-(x',\varphi(x'))|=|x-x'|$.
D'après l'inégalité des accroissements finis :
$$|G_\varphi(x)-G_\varphi(x')|\geqslant\mu\,|x-x'|-\delta\,|(x,\varphi(x))-(x',\varphi(x'))|\geqslant(\mu-\delta)\,|x-x'|\,.$$
Alors $|\psi(y)-\psi(y')|\leqslant\lambda\,|\varphi(x)-\varphi(x')|+|\beta(x,\varphi(x))-\beta(x,\varphi(x'))|\leqslant(\lambda\gamma+\delta)\,|x-x'|\leqslant\dfrac{\lambda\gamma+\delta}{\mu-\delta}\,|y-y'|$.
Or : $\dfrac{\lambda\gamma+\delta}{\mu-\delta}\leqslant\gamma\Leftrightarrow\delta\leqslant\dfrac{(\mu-\lambda)\gamma}{1+\gamma}$ ce qui est bien vérifié ici.
Ainsi $\psi$ est $\gamma$-lipschitzienne et $\boxed{f_*\text{ est bien une application de }Li_\gamma\text{ dans lui-même}}$.
4. Soit $x\in\mathbb{R}$, $y=G_\varphi(x)$, $y'=G_{\varphi'}(x)$, $\psi=f_*(\varphi)$ et $\psi'=f_*(\varphi')$. Alors :
$|f_*(\varphi)(G_\varphi(x))-f_*(\varphi')(G_\varphi(x))|=|\psi(y)-\psi'(y)|\leqslant|\psi(y)-\psi'(y')|+|\psi'(y')-\psi'(y)|$.
Comme $\psi'$ est $\gamma$-lipschitzienne : $|\psi'(y')-\psi'(y)|\leqslant\gamma\,|y'-y|$
et $|y'-y|=|\alpha(x,\varphi'(x))-\alpha(x,\varphi(x))|\leqslant\delta\,|\varphi(x)-\varphi'(x)|$.
On a : $\psi(y)=\lambda\varphi(x)+\beta(x,\varphi(x))$ et $\psi'(y')=\lambda\varphi'(x)+\beta(x,\varphi'(x))$
donc $|\psi(y)-\psi'(y')|\leqslant\lambda\,|\varphi(x)-\varphi'(x)|+\delta\,|\varphi(x)-\varphi'(x)|$.
Ainsi : $\boxed{|f_*(\varphi)(G_\varphi(x))-f_*(\varphi')(G_\varphi(x))|\leqslant(\lambda+\delta+\gamma\delta)\,|\varphi(x)-\varphi'(x)|}$.

5. Lorsque $x$ décrit $\mathbb{R}^*$, $G_\varphi(x)$ décrit également $\mathbb{R}^*$. Ainsi :

$$d_\gamma\left(f_*(\varphi), f_*(\varphi')\right) = \sup_{x\neq 0}\left|\frac{f_*(\varphi)(G_\varphi(x)) - f_*(\varphi')(G_\varphi(x))}{G_\varphi(x)}\right|.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $|G_\varphi(x)| \geqslant (\mu-\delta)\,|x|$
donc $\dfrac{|f_*(\varphi)(G_\varphi(x)) - f_*(\varphi')(G_\varphi(x))|}{|G_\varphi(x)|} \leqslant \dfrac{\lambda+\delta(1+\gamma)}{\mu-\delta}\left|\dfrac{\varphi'(x)-\varphi(x)}{x}\right|$.
Ainsi : $d_\gamma\left(f_*(\varphi), f_*(\varphi')\right) \leqslant \dfrac{\lambda+\delta(1+\gamma)}{\mu-\delta} d_\gamma(\varphi,\varphi')$.
Or : $\dfrac{\lambda+\delta(1+\gamma)}{\mu-\delta} < 1 \Leftrightarrow \delta < \dfrac{\mu-\lambda}{2+\gamma}$ ce qui est bien le cas ici.
$f_*$ est donc une application contractante dans l'espace complet $(Li_\gamma, d_\gamma)$ : elle admet un unique point fixe $\varphi^+$, qui est une application dont $\boxed{\text{le graphe horizontal est invariant par } f}$.

6. $\varphi^+$ appartient à $Li_\gamma$ donc $\left|\varphi^+(x)\right| \leqslant \gamma\,|x|$ d'où, puisque $\gamma < 1$ : $\left|\left(x, \varphi^+(x)\right)\right| = |x|$.
De plus, $\left|f(x,\varphi^+(x))\right| \geqslant \left|\mu x + \alpha(x,\varphi^+(x))\right|$ (c'est le maximum des deux coordonnées donc supérieur à la première)
et $\left|\alpha(x,\varphi^+(x))\right| \leqslant \delta\left|\left(x,\varphi^+(x)\right)\right| \leqslant \delta\,|x|$ donc $\boxed{\left|f(x,\varphi^+(x))\right| \geqslant (\mu-\delta)\,|x| = (\mu-\delta)\left|(x,\varphi^+(x))\right|}$.

7. Pour $\delta$ suffisamment petit, $\mu - \delta > 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme le graphe horizontal de $\varphi^+$ est stable par $f$, $f(x,\varphi^+(x))$ est encore un élément de $H_{\varphi^+}$ donc 4.6 donne par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|f^n(x,\varphi^+(x))\right| \geqslant (\mu-\delta)^n\left|(x,\varphi^+(x))\right|.$$

Comme $f$ est bijective, ceci donne aussi, en l'appliquant à $f^{-n}(x,\varphi^+(x))$ qui est toujours un élément du graphe horizontal de $\varphi^+$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|f^{-n}(x,\varphi^+(x))\right| \leqslant (\mu-\delta)^{-n}\left|(x,\varphi^+(x))\right|$$

qui tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$ donc $\boxed{(x,\varphi^+(x)) \text{ est dans la variété instable de } (0,0)}$.

## 5 Différentiabilité des fonctions lipschitziennes

1. On prend $x_n = x + 2^{-n}$ donc $\Delta_{x_n}\varphi = \dfrac{(2^{-n}, \varphi(x+2^{-n}) - \varphi(x))}{|(2^{-n}, \varphi(x+2^{-n}) - \varphi(x))|}$.
$\Delta_{x_n}\varphi$ est de norme 1 par construction ; cette suite bornée admet une sous-suite convergente, et quitte à ne garder que la sous-suite, il existe donc $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_{x_n}\varphi = v$.
Comme $\varphi$ est $\gamma$-lipschitzienne : $\left|\varphi(x+2^{-n}) - \varphi(x)\right| \leqslant \gamma 2^{-n}$
donc $2^{-n} \leqslant |(x_n, \varphi(x_n)) - (x,\varphi(x))| \leqslant \alpha 2^{-n}$ où $\alpha = \max(1,\gamma)$.
Ainsi la première coordonnée de $\Delta_{x_n}\varphi$ est comprise entre $\dfrac{1}{\alpha}$ et 1, mais ne peut pas tendre vers 0 : $pr_1(v)$ est non nul. Alors $pr_1(T_x\varphi)$ contient au moins $pr_1(\mathbb{R}v) = \mathbb{R}$ et c'est contenu dans $\mathbb{R}$ par construction donc : $\boxed{pr_1(T_x\varphi) = \mathbb{R}}$.

2. On note $pr_2$ la projection sur la deuxième coordonnée.
Pour tout $(x, y)$ : $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant \gamma\, |x - y|$ donc pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $x$ telle que $\Delta_{x_n}\varphi$ ait une limite $v$ :

$$|pr_2(\Delta_{x_n}\varphi)| \leqslant \gamma\, |pr_1(\Delta_{x_n}\varphi)|$$

donc, à la limite, $v$ est élément de $H^\gamma$ : $\boxed{T_x\varphi \subset H^\gamma}$.

3. $\phi$ peut être prolongée par continuité en 0 par $\phi(0) = 0$.
$\phi$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par parité, on peut limiter l'étude à $\mathbb{R}^+$. On a :

$$\phi'(x) = \frac{1}{2}\sin(\ln x) + \frac{1}{2}\cos(\ln x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\ln x + \frac{\pi}{4})$$

donc $\phi'$ est bornée par $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissement finis, $\boxed{\phi \text{ est dans } Li_\gamma \text{ pour } \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers 0 :

$$\Delta_{x_n}\phi = \frac{\left(x_n, \dfrac{x_n}{2}\sin(\ln|x_n|)\right)}{\left|\left(x_n, \dfrac{x_n}{2}\sin(\ln|x_n|)\right)\right|}.$$

Comme $\left|\dfrac{x_n}{2}\sin(\ln|x_n|)\right| \leqslant |x_n|$, la norme du dénominateur est $|x_n|$ et :

$$\Delta_{x_n}\phi = \pm(1, \frac{1}{2}\sin(\ln|x_n|)).$$

La limite si elle existe est donc dans $H^{1/2}$.
Pour tout $(u, v) \in H^{1/2}$ tel que $u \neq 0$, il existe $\theta$ tel que $\dfrac{1}{2}\sin\theta = \dfrac{v}{u}$.
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $x_n = \exp(\theta - 2n\pi)$.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et $(\Delta_{x_n}\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\left(1, \dfrac{v}{u}\right)$, donc $(u, v) \in T_0\phi$.

Ainsi, $\boxed{T_0\phi = H^{1/2}}$.

4. Pour $\gamma \leqslant 1$, la norme $|(x, \varphi(x)) - (y, \varphi(y))|$ du dénominateur est égale à $|x - y|$ donc :

$$\Delta_y\varphi = \pm\left(1, \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}\right)$$

le signe $\pm$ dépendant de la position relative de $x$ et $y$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $x$ par valeurs supérieures par exemple.
$(\Delta_{x_n}\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc admet une sous-suite convergente.
La limite est alors le seul vecteur $(1, v)$ de $T_x\varphi$ de première coordonnée 1. La suite $(\Delta_{x_n}\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence $(1, v)$ : elle converge vers $(1, v)$, ce qui montre que, pour toute suite de $]x, +\infty[$ convergente vers $x$, $\left(\dfrac{\varphi(x_n) - \varphi(x)}{x_n - x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $v$.

Le critère séquentiel assure alors que : $\lim_{h \to 0^+} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = v$.
$\varphi$ est dérivable à droite, de dérivée $v$.
On fait la même chose à gauche : pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $]-\infty, x[$ convergente vers $x$, $\frac{\varphi(x_n) - \varphi(x)}{|x_n - x|} = \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x)}{x - x_n}$ converge vers $-v$, donc $\lim_{h \to 0^-} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = v$.
Alors $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en } x}$, et $\varphi'(x) = v$.

## Rapport des correcteurs

Ce problème présente une introduction aux systèmes dynamiques avec un comportement chaotique

- Étude des itérations d'une application, d'abord dans le cas d'une application linéaire hyperbolique sur $\mathbb{R}^k$ puis en compactifiant sur le tore lorsque l'application et son inverse préservent le réseau $\mathbb{Z}^k$

- Étude du mélange topologique et de la densité des orbites périodiques. La fin aborde le cas non linéaire et donne des outils pour contrôler la régularité.

La plupart des candidats ont été en mesure d'aborder plusieurs parties du problème. Le mélange analyse/algébre linéaire, topologie et calcul différentiel ne semble pas avoir soulevé de trop grandes difficultés comme en attestent les résultats. Les questions 2.5 et 3.1 et 3.3.a ont été correctement traitées par la quasi-totalité des candidats.

**Partie 1**

Dans la première question beaucoup de copies ne s'assurent pas de l'existence de cette distance et oublient de tester certaines des conditions. Dans la question 1.2 beaucoup pensent que l'existence d'une limite simple dans $(Li_\gamma, d_\gamma)$ suffit pour prouver la complétude alors qu'il faut prouver la convergence pour la distance $d_\gamma$. Le jury a été surpris de constater que les fonctions lipschitziennes sont souvent considérées comme différentiables. Par ailleurs le théorème des accroissements finis ne semble pas d'un usage largement répandu.

**Partie linéaire**

Force est de constater que l'algèbre linéaire est mal maitrisée La notion de norme subordonnée n'est pas bien connue et les questions 2.2 et 2.3 sont assez rarement bien traitées.

Au 2.4, il est surprenant de lire assez souvent que évidemment $E$ est la somme des sous-espaces propres (voire la réunion !). Les sous espaces stables d'un endomorphisme sont d'ailleurs souvent confondus avec les sous espaces propres. D'autre part les conséquences pour l'endomorphisme réel du travail effectué dans le corps des nombres complexes sont rarement explicités correctement.

**Partie linéarité et topologie**

Comme déjà mentionné, le début de cette partie est assez bien compris et largement traité . Le jury a été particulièrement attentif à la qualité des justifications présentées, appréciant peu les assertions de type « il est clair que l'endomorphisme est hyperbolique ». La question 3.4 des points périodiques était plus difficile mais certains ont correctement prouvé les deux inclusions. Dans la question 3.5 les distances (comme dans tout le problème) considérées proviennent de normes (le résultat se géné ralise à la classe de toutes les distances qui leur sont bilipschitz-équivalentes).

La question 3.6.2 a révélé que les candidats ont beaucoup de difficultés à manipuler les inf. On a vu des choses catastrophiques où les inf sont traités comme des sup. Les difficultés sont ici à des niveaux élémentaires. La fin du 3 était sans doute la partie la plus poussée du problème. Elle a cependant été abordée avec succès par quelques candidats.

**Partie 4**

Les candidats ont surtout étudié la première question. Plusieurs ont correctement utilisé le théorème d'inversion locale. Mais rares sont ceux qui ont vu que l'on pouvait appliquer le théorème du point fixe à $F$ pour prouver que $f$ est une bijection.

**Partie 5**

Cette partie a été construite de manière à être indépendante du reste du problème (bien qu'en fait il s'agit de techniques utilisées pour comprendre la régularité des variétés stables). Elle n'a été que minoritairement abordée ce qui est un peu dommage vu la relative simplicité de certaines questions.

Le début du 5.3 montre des difficultés surprenantes à ce niveau pour étudier une fonction assez simple d'une variable réelle.