Le sujet se décomposait en quatre parties et 37 questions.

Les parties III et IV constituent le cœur du sujet. Elles sont construites sur un modèle similaire aux parties I et II. On introduit les opérateurs de Dunkl pour le groupe symétrique dans $\mathbf{R}^n$. La preuve de la commutativité était trop difficile au niveau de l'agrégation et nous l'avons donc admise. On utilise ces opérateurs pour trouver une équation fonctionnelle sur les intégrales de la forme

$$c_k = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{(x,x)}{2}} \prod_{1\leq i<j\leq n} |x_j - x_i|^{2k} dx_1 \dots dx_n.$$

Ces intégrales interviennent en probabilité et en arithmétique. Un peu d'analyse complexe permettrait d'arriver à la formule générale

$$c_k = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(k\,i+1)}{\Gamma(k+1)},$$

où Γ désigne la fonction classique Gamma, mais il fallait utiliser un théorème sur le comportement des zéros des fonctions holomorphes, théorème qui n'était pas au programme.

I Le cas classique

1. Soit $P = X_1^{\alpha_1} \dots X_i^{\alpha_i} \dots X_j^{\alpha_j} \dots X_n^{\alpha_n}$ et $\theta_{i,j}$ la transposition (i,j) pour $1 \leq i < j \leq n$.
   On a ${}^{\theta_{i,j}}P = X_1^{\alpha_1} \dots X_j^{\alpha_i} \dots X_i^{\alpha_j} \dots X_n^{\alpha_n}$ d'où l'on tire sans difficultés
   (a) Si $\alpha_i = \alpha_j$, on trouve 0.
   (b) Si $\alpha_i < \alpha_j$ on trouve
   $$-X_1^{\alpha_1} \dots X_i^{\alpha_i} \dots X_j^{\alpha_i} \dots X_n^{\alpha_n} \Big(\sum_{k=0}^{\alpha_j-\alpha_i-1} X_j^{\alpha_j-\alpha_i-1-k} X_i^k \Big).$$
   (c) Si $\alpha_i > \alpha_j$ on trouve
   $$X_1^{\alpha_1} \dots X_i^{\alpha_j} \dots X_j^{\alpha_j} \dots X_n^{\alpha_n} \Big(\sum_{k=0}^{\alpha_i-\alpha_j-1} X_j^{\alpha_i-\alpha_j-1-k} X_i^k \Big).$$
2. D'après la question précédente, $X_i - X_j$ divise $P - {}^{\theta_{i,j}}P$ pour tout monôme P. Par linéarité c'est encore vrai pour tout polynôme P.

3. La signature est l'unique morphisme du groupe symétrique dans $\{-1, 1\}$ qui ne soit pas trivial. Il vaut -1 sur les transpositions. Décomposons toute permutation σ en un produit de transpositions $\theta_1 \dots \theta_N$. On a $\epsilon(\sigma) = (-1)^N$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, on a donc

$$^{\sigma}P =^{\theta_1 \dots \theta_N} P =^{\theta_1 \dots \theta_{N-1}} \left(^{\theta_N}P\right).$$

Si P est antisymétrique une récurrence immédiate donne $^{\sigma}P = (-1)^N P = \epsilon(\sigma)P$.

4. Plusieurs solutions sont possibles, notamment en analysant l'action d'une transposition sur Δ, on peut aussi utiliser le Vandermonde. Voici une démonstration qui utilise une formule connue.
Soit $\Delta = \prod_{1 \le i < j \le n} (X_j - X_i)$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a donc

$$^{\sigma}\Delta = \prod_{1 \le i < j \le n} (X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)}).$$

On utilise la formule du cours

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Posons $\lambda = \prod_{1 \le i < j \le n} (j - i)$. On a donc $\Delta = \lambda \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{X_j - X_i}{j - i}$ et

$$^{\sigma}\Delta = \lambda \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)}}{j - i} = \lambda \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)}}{\sigma(j) - \sigma(i)}.$$

On remarque alors que l'expression $\frac{X_j - X_i}{j - i}$ ne dépend que de la paire $\{i, j\}$ et non pas du couple (i, j). Ceci permet de faire le changement d'indice $i \mapsto \sigma^{-1}(i)$ dans le produit $\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)}}{\sigma(j) - \sigma(i)}$ ce qui donne $\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{X_j - X_i}{j - i}$. Ce qui permet de conclure que l'on a $^{\sigma}\Delta = \epsilon(\sigma)\Delta$.

5. L'anneau $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ est factoriel. Les monômes $X_i - X_j$ sont de degré 1 et unitaires donc irréductibles. D'après I-2, si P est antisymétrique il est divisible par $(X_i - X_j)$ pour $i < j$ car $P -^{\theta_{i,j}} P = 2P$. Comme ces monômes sont deux à deux premiers entre eux, P est divisible par leur produit, c'est à dire Δ.

6. Si P est homogène non nul, l'opérateur $P(\partial)$ est homogène de degré $-\deg(P)$, c'est à dire que l'on a pour tout polynôme homogène Q non nul

$$\deg(P(\partial)Q) = \deg(Q) - \deg(P)$$

lorsque $P(\partial)Q$ est non nul. Si $\deg(P) > \deg(Q)$ alors $P(\partial)Q$ est nul. Si $\deg(Q) > \deg(P)$ et que $P(\partial)Q$ est non nul, c'est un polynôme homogène de degré strictement positif et son évaluation en $(0,\dots,0)$ donne 0. Dans tous les cas on a $\langle\, P, Q \,\rangle = 0$.

7. On a

$$\langle\, PQ, R \,\rangle = \langle\, QP, R \,\rangle = \big((QP)(\partial)(R)\big)(0) =$$
$$\big(Q(\partial)\,(P(\partial)R)\,\big)(0) = \langle\, Q, P(\partial)(R) \,\rangle$$

car on a d'après l'énoncé $(QP)(\partial) = Q(\partial) \circ P(\partial)$.

8. Il suffit de montrer que le produit bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique et défini positif. Pour cela il suffit de trouver une base orthogonale avec $\langle P, P \rangle > 0$ pour tout élément P de la base. Or la base canonique $(X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n})_{(\alpha_1,\dots,\alpha_N)\in\mathbb{N}^n}$ est clairement une base orthogonale. De plus on a

$$\langle X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}, X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} \rangle = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

avec pour convention que $0! = 1$.

9. On vérifie l'assertion sur la base ci-dessus, ce qui est immédiat. On a donc pour tous P, Q

$$\langle\, {}^{\sigma}P,\ {}^{\sigma}Q \,\rangle = \langle\, P, Q \,\rangle.$$

10. Le déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & X_1 & \dots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & \dots & X_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n & \dots & X_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

se développe par la formule du déterminant en

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) X_1^{\sigma(1)-1} \dots X_n^{\sigma(n)-1} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (X_j - X_i).$$

Donc dans la base orthogonale, Δ n'a que des composantes qui valent ± 1. On a donc

$$\begin{aligned} \langle \Delta, \Delta \rangle &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \langle X_1^{\sigma(1)-1} \dots X_n^{\sigma(n)-1}, X_1^{\sigma(1)-1} \dots X_n^{\sigma(n)-1} \rangle \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\sigma(1)-1)! \dots (\sigma(n)-1)! = n!\Big(0!1! \dots (n-1)!\Big) = 1!2! \dots n! \end{aligned}$$

II Opérateur de Dunkl en rang 1

Dans cette partie $k > 0$ et $T(f)(x) = f'(x) + k\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. On a d'après l'indication $\frac{f(x)-f(-x)}{x} = \int_{-1}^{1} f'(tx)dt$ pour $x \neq 0$. Le second membre est une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ car $(t,x) \mapsto f'(tx)$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$ et que l'on intègre en t sur un intervalle compact.

2. On note $p_n(x) = x^n$. On trouve $T(p_0) = 0$, $T(p_{2n})(x) = 2n\,x^{2n-1}$ et $T(p_{2n+1})(x) = (2n+1+2k)x^{2n}$.

3. La question est délicate. On a

$$V_k(f)(x) = b_k \int_{-1}^{1} f(xt)(1-t)^{k-1}(1+t)^k dt.$$

Comme $k-1 > -1$ l'intégrale est clairement convergente. On calcule $T(V_k(f))(x)$ en dérivant sous le signe somme. Il vient en remarquant que l'on ne manipule que des fonctions intégrables pour $x \neq 0$ (on conclut par continuité) :

$$T(V_k(f))(x) = b_k \int_{-1}^{1} \big(tf'(tx) + k\frac{f(tx)-f(-tx)}{x}\big)(1-t)^{k-1}(1+t)^k dt$$

$$= b_k \int_{-1}^{1} \{tf'(tx)(1-t)^{k-1}(1+t)^k + k\frac{f(tx)}{x}\underbrace{\Big((1-t)^{k-1}(1+t)^k - (1+t)^{k-1}(1-t)^k\Big)}_{2t(1+t)^{k-1}(1-t)^{k-1}}\}dt$$

$$= b_k \int_{-1}^{1} \{tf'(tx)(1-t)^{k-1}(1+t)^k + \underbrace{2kt(1-t^2)^{k-1}}_{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-t^2)^k}\frac{f(tx)}{x}\}dt.$$

On peut faire sans problème une intégration par parties (au sens généralisé). On obtient donc

$$b_k \int_{-1}^{1} \{tf'(tx)(1-t)^{k-1}(1+t)^k + (1-t^2)^k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{f(tx)}{x}\Big)\}dt + b_k\underbrace{[(1-t^2)^k\frac{f(xt)}{x}]_{-1}^{1}}_{0}$$

On a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{f(tx)}{x}\Big) = f'(tx)$. Il vient alors

$$b_k \int_{-1}^{1} \{tf'(tx)(1-t)^{k-1}(1+t)^k + (1-t^2)^k f'(tx)\}dt =$$

$$b_k \int_{-1}^{1} f'(tx)(1-t)^{k-1}(1+t)^k(t+1-t)dt = V_k(f')(x).$$

4. On a $E_\lambda = V_k(e_\lambda)$ avec $e_\lambda(t) = e^{\lambda t}$. Il vient

$$T(E_\lambda) = V_k({e_\lambda}') = V_k(\lambda e_\lambda) = \lambda E_\lambda.$$

5. On note que J_λ est la partie paire de E_λ. D'après II-4, on a

$${E_\lambda}'(x) + k\frac{E_\lambda(x) - E_\lambda(-x)}{x} = \lambda E_\lambda(x).$$

Écrivons $E_\lambda(x) = J_\lambda(x) + K_\lambda(x)$ avec K_λ la partie impaire. En identifiant les parties paires et impaires dans l'égalité ci-dessus il vient deux équations étendues par continuité pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$${J_\lambda}'(x) = \lambda K_\lambda(x) \quad \text{et} \quad {K_\lambda}'(x) + 2k\frac{K_\lambda(x)}{x} = \lambda J_\lambda(x).$$

On a donc $K_\lambda = \frac{1}{\lambda}{J_\lambda}'$ et

$$E_\lambda(x) = J_\lambda(x) + K_\lambda(x) = J_\lambda(x) + \frac{1}{\lambda}{J_\lambda}'(x).$$

6. D'après la question précédente on a ${J_\lambda}'(x) = \lambda K_\lambda(x)$ et en remplaçant dans la deuxième équation on a trouve pour $x \neq 0$,

$${J_\lambda}''(x) + \frac{2k}{x}{J_\lambda}'(x) = \lambda^2 J_\lambda(x),$$

ce qui montre que J_λ vérifie l'équation $xy''(x) + 2ky'(x) = \lambda^2 xy(x)$. Cette équation est encore vérifiée pour $x = 0$ car $J'_\lambda(0) = 0$ (c'est une fonction impaire).

III Opérateur de Dunkl en dimension n

1. Si Q est constant alors clairement $T_l(k)(Q)$ est nul. L'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial X_l}$ et les opérateurs Δ_β diminue le degré de 1. Donc si $T_l(k)(Q)$ est non nul, il est de degré $\deg(Q) - 1$.

2. La question est délicate, car l'ensemble de sommation n'est pas invariant par l'action du groupe $\mathfrak{S}_n$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a

$$ {}^{\sigma}\Big(T_l(k)(Q)\Big) = {}^{\sigma}\Big(\frac{\partial Q}{\partial X_l}\Big) + k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta)\, {}^{\sigma}\Big(\frac{Q - {}^{\theta_\beta}Q}{X_i - X_j}\Big). \tag{1} $$

Calculons le premier terme du second membre de (1). Pour $Q = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ on a

$$ {}^{\sigma}\Big(\frac{\partial Q}{\partial X_l}\Big) = {}^{\sigma}\Big(\alpha_l X_1^{\alpha_1} \dots X_l^{\alpha_l - 1} \dots X_n^{\alpha_n}\Big) = $$
$$ \alpha_l X_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \dots X_{\sigma(l)}^{\alpha_l - 1} \dots X_{\sigma(n)}^{\alpha_n} = \frac{\partial({}^{\sigma}Q)}{\partial X_{\sigma(l)}}. \tag{2} $$

Pour le second terme, on va changer l'ensemble de sommation, afin qu'il soit stable par l'action du groupe symétrique.
Introduisons $-R^+ = \{e_j - e_i,\ 1 \leq i < j \leq n\}$. On remarque que $R^+ \cap -R^+ = \emptyset$ et que $R^+ \cup -R^+ = \{e_i - e_j,\ i \neq j\}$ est stable sous l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ définie par $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
La transposition que l'on associe à $e_i - e_j$ (avec $i > j$) est encore $\theta_{i,j}$. Par extension on note que l'on a $X_{-\beta} = -X_\beta$ pour $\beta \in R^+$. Le point est de remarquer que $(e_l, \beta)\frac{Q - {}^{\theta_\beta}Q}{X_\beta}$ n'est pas changé lorsque β est changé en son opposé.
Finalement on peut étendre l'ensemble de sommation à la réunion $R^+ \cup -R^+$. On a alors

$$ k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta) \frac{Q - {}^{\theta_\beta}Q}{X_\beta} = \frac{k}{2} \sum_{\beta \in R^+ \cup -R^+} (e_l, \beta) \frac{Q - {}^{\theta_\beta}Q}{X_\beta}. $$

Faisons agir σ sur cette expression ce qui donnera le second terme dans (1) en remarquant que l'on a $\rho(\sigma)(X_\beta) = X_{\sigma(\beta)}$.

$$ \frac{k}{2} \sum_{\beta \in R^+ \cup -R^+} (e_l, \beta)\, {}^{\sigma}\Big(\frac{Q - {}^{\theta_\beta}Q}{X_\beta}\Big) = \frac{k}{2} \sum_{\beta \in R^+ \cup -R^+} (e_l, \beta) \frac{{}^{\sigma}Q - {}^{\sigma\theta_\beta}Q}{X_{\sigma(\beta)}} = $$
$$ \frac{k}{2} \sum_{\beta \in R^+ \cup -R^+} (e_l, \beta) \frac{{}^{\sigma}Q - {}^{\sigma\theta_\beta\sigma^{-1}}({}^{\sigma}Q)}{X_{\sigma(\beta)}} \tag{3} $$

Comme on a $\sigma\theta_\beta\sigma^{-1} = \theta_{\sigma(\beta)}$ on en déduit que l'expression ci-dessus vaut

$$ \frac{k}{2} \sum_{\beta \in R^+ \cup -R^+} (e_l, \beta) \frac{{}^{\sigma}Q - {}^{\theta_{\sigma(\beta)}}({}^{\sigma}Q)}{X_{\sigma(\beta)}} = (\text{changement de variable}\, \beta \mapsto \sigma^{-1}(\beta)) $$
$$ \frac{k}{2} \sum_{\beta \in R^+ \cup -R^+} (e_l, \sigma^{-1}(\beta)) \frac{{}^{\sigma}Q - {}^{\theta_\beta}({}^{\sigma}Q)}{X_\beta} = \frac{k}{2} \sum_{\beta \in R^+ \cup -R^+} (e_{\sigma(l)}, \beta) \frac{{}^{\sigma}Q - {}^{\theta_\beta}({}^{\sigma}Q)}{X_\beta} $$
$$ = k \sum_{\beta \in R^+} (e_{\sigma(l)}, \beta) \frac{{}^{\sigma}Q - {}^{\theta_\beta}({}^{\sigma}Q)}{X_\beta} \tag{4} $$

car on a $(e_l, \sigma^{-1}(\beta)) = (e_{\sigma(l)}, \beta)$, l'action du groupe symétrique étant orthogonale. En regroupant les expressions calculées en (2) et (4) on trouve bien que l'on a

$$^{\sigma}\Big(T_l(k)\big(Q\big)\Big) = T_{\sigma(l)}(k)\big(^{\sigma}Q\big).$$

Autre méthode : On explicite $T_\ell(k)$, en évaluant les produits $(e_\ell, e_i - e_j)$. On obtient

$$\begin{aligned} T_\ell(k)(Q) = \frac{\partial Q}{\partial X_l} + k \sum_{1\leq i<j\leq n} (e_l, e_i - e_j) \frac{Q - {}^{\theta_{i,j}}Q}{X_i - X_j} = \\ \frac{\partial Q}{\partial X_l} + k \sum_{\ell<j\leq n} \frac{Q - {}^{\theta_{\ell,j}}Q}{X_l - X_j} - k \sum_{1\leq i<\ell} \frac{Q - {}^{\theta_{i,l}}Q}{X_i - X_l} = \\ \frac{\partial Q}{\partial X_l} + k \sum_{i\neq\ell} \frac{Q - {}^{\theta_{i,l}}Q}{X_l - X_i}. \quad (5) \end{aligned}$$

On fait agir $\sigma \in \Sigma_n$ sur cette expression et on utilise comme ci-dessus le changement de variable $i \mapsto \sigma^{-1}(i)$.

3. On a

$$\begin{aligned} \Delta_\beta(P\cdot Q) = \frac{P\cdot Q - {}^{\theta_\beta} P \cdot {}^{\theta_\beta} Q}{X_\beta} = \\ P\cdot\Big(\frac{Q - {}^{\theta_\beta} Q}{X_\beta}\Big) + \Big(\frac{P - {}^{\theta_\beta} P}{X_\beta}\Big) \cdot {}^{\theta_\beta}Q = P\cdot\Delta_\beta(Q) + \Delta_\beta(P)\cdot\Big({}^{\theta_\beta}Q\Big). \end{aligned}$$

4. On applique le calcul de la question précédente avec $P = X_i$. Un calcul facile montre que l'on a

$$\Delta_\beta(X_i) = \frac{X_i - {}^{\theta_\beta} X_i}{X_\beta} = \frac{X_i - X_{\theta_\beta(i)}}{X_\beta} = (e_i, \beta).$$

On a d'après la question on a

$$\Delta_\beta M_i = M_i \Delta_\beta + (e_i, \beta)\rho(\theta_\beta).$$

Calculons maintenant le commutateur

$$\begin{aligned} [T_j(k), M_i] = [\frac{\partial}{\partial X_j} + k \sum_{\beta\in R^+} (e_j, \beta)\Delta_\beta, M_i] = \\ \underbrace{[\frac{\partial}{\partial X_j}, M_i]}_{\delta_{i,j} Id} + k \sum_{\beta\in R^+} (e_j, \beta)[\Delta_\beta, M_i] = (e_i, e_j) Id + k \sum_{\beta\in R^+} (e_j, \beta)(e_i, \beta)\rho(\theta_\beta). \end{aligned}$$

5. On a $D(k) = \sum_{i=1}^{n} T_i(k)^2$ d'où d'après la formule du préambule sur le commutateur

$$[D(k), M_l] = [\sum_{i=1}^{n} T_i(k)^2, M_l] = \sum_{i=1}^{n} T_i(k)[T_i(k), M_l] + [T_i(k), M_l]T_i(k) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} T_i(k)\Big((e_i, e_l)Id + k \sum_{\beta\in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)\rho(\theta_\beta)\Big)+$$
$$\sum_{i=1}^{n} \Big((e_i, e_l)Id + k \sum_{\beta\in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)\rho(\theta_\beta)\Big)T_i(k) =$$
$$2\,T_l(k) + k\sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta\in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)\Big(T_i(k) \circ \rho(\theta_\beta) + \rho(\theta_\beta) \circ T_i(k)\Big)$$

Or on a d'après le III-2, $\rho(\theta_\beta) \circ T_i(k) = T_{\theta_\beta(i)} \circ \rho(\theta_\beta)$. Le second terme de la dernière égalité vaut donc

$$k\sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta\in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)T_{\theta_\beta(i)} \circ \rho(\theta_\beta) + k\sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta\in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)T_i(k) \circ \rho(\theta_\beta)$$

puis par changement de variable $i \mapsto \theta_\beta(i)$ dans la première somme

$$k\sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta\in R^+} (e_{\theta_\beta(i)}, \beta)(e_l, \beta)T_i(k) \circ \rho(\theta_\beta) + k\sum_{i=1}^{n} \sum_{\beta\in R^+} (e_i, \beta)(e_l, \beta)T_i(k) \circ \rho(\theta_\beta)$$

qui est nul car $(e_{\theta_\beta(i)}, \beta) = -(e_i, \beta)$.

IV Produit scalaire de Dunkl et Intégrale de Mehta

1. Les opérateurs $T_i(k)$ sont de degré -1. Si $\deg(P) > \deg(Q)$ alors $P(T(k))(Q)$ est nul. Si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $P(T(k))(Q)$ est nul ou de degré $\deg(Q) - \deg(P)$. L'évaluation en $(0, \dots, 0)$ donne alors 0.
2. On a par définition et en utilisant la commutativité admise

$$\langle\, M_l(P), Q \,\rangle_k = \langle\, X_l P, Q \,\rangle_k = \big(T_l(k) \circ P(T)\big)(Q)(0) =$$
$$P(T)\big(T_l(k)Q\big)(0) = \langle\, P, T_l(Q) \,\rangle_k.$$

3. Par linéarité on vérifie l'assertion pour $P = X_{i_1} \dots X_{i_N}$. D'après III-2 on a $\rho(\sigma) \circ T_l(k) \circ \rho(\sigma^{-1}) = T_{\sigma(l)}(k)$ pour toute permutation σ. On a donc par récurrence sur N

$$\rho(\sigma) \circ \Big(T_{i_1}(k) \circ \dots \circ T_{i_N}(k)\Big) \rho(\sigma^{-1}) = T_{\sigma(i_1)}(k) \circ \dots \circ T_{\sigma(i_N)}(k)$$

On a donc

$$\rho(\sigma) \circ P(T) = \big({}^{\sigma}P\big)(T) \circ \rho(\sigma)$$

En appliquant cette formule à Q on a $\rho(\sigma)\big(P(T(k))Q\big) = \big({}^{\sigma}P\big)(T(k))({}^{\sigma}Q)$ et l'évaluation en $(0, \dots, 0)$ donne le résultat cherché $\langle\, {}^{\sigma}P,\ {}^{\sigma}Q \,\rangle_k = \langle\, P, Q \,\rangle_k$.

4. L'opérateur $D(k)$ est un opérateur homogène de degré -2 sur $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, donc pour tout Q il existe N tel que $D(k)^N(Q) = 0$. Par conséquent la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\frac{D(k)}{2})^p}{p!} Q$$

définissant l'exponentielle est une somme finie pour tout Q.

5. On a $[M_l, e^{-\frac{D(k)}{2}}] = M_l e^{-\frac{D(k)}{2}} - e^{-\frac{D(k)}{2}} M_l$. On peut remplacer l'exponentielle par sa série et calculer le commutateur termes à termes car la série est une somme finie quand on l'évalue sur un polynôme Q.
D'après III-5 on a $[M_l, -\frac{D(k)}{2}] = T_l(k)$. Comme les opérateurs $D(k)$ et $T_l(k)$ commutent on va montrer que l'on a la formule

$$[M_l, \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p] = p\, T_l(k) \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^{p-1}.$$

On utilise la formule sur le commutateur $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ pour A, B, C trois opérateurs. On a donc par récurrence sur p

$$[M_l, \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^{p+1}] = [M_l, \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p]\big(-\frac{D(k)}{2}\big) + \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p [M_l, -\frac{D(k)}{2}] =$$
$$p\, T_l(k)\big(-\frac{D(k)}{2}\big)^{p-1}\big(-\frac{D(k)}{2}\big) + \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p T_l(k) =$$
$$(p+1)\, T_l(k)\big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p.$$

On a donc

$$[M_l, e^{-\frac{D(k)}{2}}] = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!}[M_l, \big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p] =$$
$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p!} p\, T_l(k)\big(-\frac{D(k)}{2}\big)^{p-1} = T_l(k) \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!}\big(-\frac{D(k)}{2}\big)^p = T_l(k) e^{-\frac{D(k)}{2}}.$$

6. Pour montrer que $T_l(k)$ se prolonge en un opérateur sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ il suffit de le montrer pour les opérateurs Δ_β. Pour $\beta = e_i - e_j$ on a

$$\Delta_\beta(f)(x) = \frac{f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)}{x_i - x_j}.$$

   On peut considérer la fonction

$$g(t) = f(x_1, \dots, x_i + t(x_j - x_i), \dots, x_j + t(x_i - x_j), \dots, x_n).$$

   On a alors

$$\Delta_\beta(f)(x) = \frac{g(1) - g(0)}{x_i - x_j} = \frac{1}{x_i - x_j} \int_0^1 g'(t)dt.$$

   Posons $w(t) = (x_1, \dots, x_i + t(x_j - x_i), \dots, x_j + t(x_i - x_j), \dots, x_n)$. Il vient $g'(t) = (x_i - x_j)\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(w(t)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(w(t))\big)$ d'où l'on tire

$$\Delta_\beta(f)(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(w(t))dt - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(w(t))dt$$

   qui est bien une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

7. On a $M_\psi f(x) = e^{-\frac{(x,x)}{2}} f(x)$. Calculons alors

$$T_l(k)(M_\psi f) = T_l(k)(\psi f) = \frac{\partial(\psi f)}{\partial x_l} + k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta)\Delta_\beta(\psi f).$$

   Or ψ est une fonction invariante sous l'action du groupe symétrique, donc la formule du III-3 donne $\Delta_\beta(\psi f) = \psi \Delta_\beta(f)$. Il vient donc

$$T_l(\psi f) = -x_l(\psi f) + \psi \frac{\partial f}{\partial x_l} + k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta)\psi\Delta_\beta(f) =$$
$$- x_l(\psi f) + \psi\Big(\frac{\partial f}{\partial x_l} + k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta)\Delta_\beta(f)\Big).$$

   On a donc $T_l \circ M_\psi = M_\psi \circ T_l - M_\psi \circ M_l$.

8. D'après IV-7 on a sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$,

$$T_l \circ M_\psi = M_\psi \circ T_l - M_\psi \circ M_l = M_\psi \circ (T_l(k) - M_l),$$

   c'est à dire $M_\psi^{-1} \circ T_l(k) \circ M_\psi = T_l(k) - M_l$ qui est bien un opérateur sur les fonctions polynomiales. Par composition et IV-4 l'opérateur $M_\psi^{-1} \circ T_l(k) \circ M_\psi \circ e^{-\frac{D(k)}{2}}$ est un opérateur de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$.

9. On a d'après la question précédente

$$M_\psi^{-1}\circ T_l(k)\circ M_\psi\circ e^{-\frac{D(k)}{2}}=(T_l(k)-M_l)\circ e^{-\frac{D(k)}{2}}$$

Or d'après IV-5, on $[M_l,e^{-\frac{D(k)}{2}}]=T_l\circ e^{-\frac{D(k)}{2}}$, c'est à dire

$$T_l\circ e^{-\frac{D(k)}{2}}-M_l\circ e^{-\frac{D(k)}{2}}=-e^{-\frac{D(k)}{2}}\circ M_l.$$

On a donc comme opérateurs sur les fonctions polynomiales

$$M_\psi^{-1}\circ T_l\circ M_\psi\circ e^{-\frac{D(k)}{2}}=-e^{-\frac{D(k)}{2}}\circ M_l.$$

10. Il suffit de montrer la formule proposée pour tout polynôme homogène et même pour tout momôme. On raisonne par récurrence sur le degré de P
Si $P=X_l$ on a

$$T_l(k)(\psi)(x)=-x_l\psi(x)$$

car ψ est un fonction invariante sous l'action du groupe symétrique. Or on a $e^{-\frac{D(k)}{2}}(X_l)=X_l$ car X_l est de degré 1 et que $-\frac{D(k)}{2}$ est un opérateur de degré -2. On a donc

$$T_l(k)(\psi)(x)=-\psi(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(X_l)(x).$$

Supposons maintenant que l'on a $P=X_lQ$ avec Q vérifiant la formule de la question. On a

$$\begin{aligned}&P(T)(\psi)(x)=T_l(k)\big(Q(T)\psi\big)(x)=\\&(-1)^{\deg(Q)}\,T_l(k)\big(\underbrace{M_\psi\circ e^{-\frac{D(k)}{2}}(Q)}_{Par\,récurrence\,sur\,Q}\big)=(-1)^{\deg(Q)}\big(T_l(k)\circ M_\psi\circ e^{-\frac{D(k)}{2}}\big)(Q)=\\&(-1)^{\deg(Q)}\underbrace{\big(-M_\psi\circ e^{-\frac{D(k)}{2}}\circ M_l\big)}_{d'après\,IV-9}(Q)=(-1)^{\deg(Q)+1}\psi(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(X_lQ)(x)=\\&\qquad(-1)^{\deg(P)}\psi(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x)\qquad(6)\end{aligned}$$

11. On applique la formule précédente pour $P=\Delta$.
Il faut remarquer que l'on a $D(k)(\Delta)=0$, car c'est un polynôme antisymétrique donc divisible par Δ d'après I-5, c'est absurde s'il est non nul pour une raison de degré.
Pour justifier le fait que le polynôme est antisymétrique il faut remarquer que par définition on a $(\sum_{i=1}^n X_i^2)(T)=D(k)$ et d'après la preuve de IV-3 on a $\rho(\sigma)\circ D(k)\circ\rho(\sigma^{-1})=D(k)$, donc

$$\rho(\sigma)(D(k)(\Delta))=D(k)(\rho(\sigma)\Delta)=\epsilon(\sigma)\Delta.$$

En conséquence on a $e^{-\frac{D(k)}{2}}(\Delta)=\Delta$ et $\Delta(T)(\psi)(x)=(-1)^{\deg\Delta}e^{-\frac{(x,x)}{2}}\;\Delta(x)$.

12. La question est délicate.

Pour $k > 0$ le poids w_k est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$. Supposons g dans l'espace de Schwartz et f une fonction polynomiale. En dehors des hyperplans $x_i = x_j$ la fonction w_k est dérivable et on a

$$\frac{\partial w_k}{\partial x_l} = w_k \frac{\partial \log w_k}{\partial x_l} = \sum_{\beta \in R^+} 2k(e_l, \beta) \frac{w_k}{(\beta, x)}$$

avec $(\beta, x) = x_i - x_j$ si $\beta = e_i - e_j$.

Toutes les intégrales que l'on manipule sont convergentes car systématiquement les intégrandes sont des fonctions à décroissante rapide.

On a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Big(T_l(g)(x) f(x) + g(x) T_l(f)(x) \Big) w_k(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} \Big(\frac{\partial (fg)}{\partial x_l} + k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta) \big(\Delta_\beta(g) f + g \Delta_\beta(f) \big) \Big) w_k(x) dx \quad (7)$$

On a $\Delta_\beta(g)(x) = \frac{g(x) - ({}^{\theta_\beta} g)(x)}{(\beta, x)}$, par conséquent on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \big(\Delta_\beta(g) f + g \Delta_\beta(f) \big) w_k(x) = 2 \int_{\mathbf{R}^n} \frac{g(x) f(x)}{(\beta, x)} w_k(x) dx - \int_{\mathbf{R}^n} \frac{({}^{\theta_\beta} g)(x) f(x)}{(\beta, x)} w_k(x) dx - \int_{\mathbf{R}^n} \frac{g(x) ({}^{\theta_\beta} f)(x)}{(\beta, x)} w_k(x) dx$$

Les deux dernières intégrales se compensent par changement de variable $x \mapsto \theta_\beta(x)$. On remarque que la fonction $\frac{w_k(x)}{(\beta, x)}$ est L^1_{loc}, ça se voit en faisant un changement de repère pour se ramener à une fonction de la variable réelle $\frac{1}{t^{1-2k}}$. Bref en reprenant (7) on a d'après le calcul de $\frac{\partial w_k}{\partial x_l}$ fait plus haut

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Big(\frac{\partial (fg)}{\partial x_l} + 2k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta) \frac{g(x) f(x)}{(\beta, x)} \Big) w_k(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial (f g w_k)}{\partial x_l} dx = 0$$

car la fonction $f g w_k$ est nulle à l'infini et décroît suffisamment vite. En effet on a

$$|f g w_k(x_1, \ldots, A, \ldots, x_n)| \leq C \frac{1}{1 + A^2} \prod_{i \neq l} \frac{1}{1 + x_i^2},$$

ce qui montre que l'on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial (f g w_k)}{\partial x_l} dx = \lim_{A \mapsto \infty} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f g w_k(x_1, \ldots, A, \ldots, x_n) dx_1 \cdots \widehat{dx_l} \cdots dx_n - \lim_{A \mapsto -\infty} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f g w_k(x_1, \ldots, A, \ldots, x_n) dx_1 \cdots \widehat{dx_l} \cdots dx_n = 0.$$

13. Pour P homogène de degré strictement positif on a d'après IV-10

$$\psi(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x) = (-1)^{\deg P}P(T)(\psi)(x)$$

donc

$$\int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x)w_k(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} (-1)^{\deg P}P(T)(\psi)(x)w_k(x)dx = 0$$

d'après la question précédente appliquée à $f = \psi$ et $g = 1$. En effet on aurait par récurrence immédiate sur IV-12

$$\int_{\mathbf{R}^n} (-1)^{\deg P}P(T)(\psi)(x)1w_k(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)P(T)(1)w_k(x)dx.$$

En conséquence seule la partie de degré 0 intervient, id on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x)w_k(x)dx = P(0)\int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)w_k(x)dx = c_kP(0).$$

14. Pour $k > 0$ et P, Q homogènes (on étend ensuite le résultat par linéarité à tous P, Q) on a d'après IV-10

$$\begin{gathered}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{D(k)}{2}}(P)(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(Q)(x)\psi(x)w_k(x)dx = \\ \int_{\mathbf{R}^n} (-1)^{\deg P}P(T)(\psi)(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(Q)(x)w_k(x)dx = \text{d'après IV} - 12 \\ \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)P(T)\big(e^{-\frac{D(k)}{2}}(Q)\big)w_k(x)dx = \\ \int_{\mathbf{R}^n} \underbrace{e^{-\frac{D(k)}{2}}(P(T)Q)}_{\textit{commutativité des opérateurs}} \psi(x)w_k(x)dx = (P(T)Q)(0)c_k = c_k\langle\, P, Q\,\rangle_k\end{gathered}$$

ce qui donne le résultat car c_k est strictement positif.

15. Pour $k > 0$ la formule précédente montre que le produit est symétrique (et positif). Les opérateurs $T_l(k)$ sont polynomiaux en k, la dépendance du produit $\langle\, P, Q\,\rangle_k$ est polynomiale en k. La symétrie se prolonge à tout $k \in \mathbf{R}$. Remarquons que le produit n'est pas forcément défini positif pour $k < 0$, comme le montre la formule donnée dans l'énoncé pour $\langle \Delta, \Delta\rangle_k$.

16. Pour $k > 0$ on calcule

$$\begin{aligned}c_k \cdot \langle \Delta, \Delta\rangle_k \underset{IV-14}{=} \int_{\mathbf{R}^n} \underbrace{e^{-\frac{D(k)}{2}}(\Delta)}_{=\Delta}(x)e^{-\frac{D(k)}{2}}(\Delta)(x)w_k(x)\psi(x) = \\ \int_{\mathbf{R}^n} \Delta(x)^2\psi(x)w_k(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)w_{k+1}(x)dx = c_{k+1}\end{aligned}$$

car on a $\Delta^2(x)w_k(x) = w_{k+1}(x)$.