Une démonstration d'un théorème de Desargues par le calcul barycentrique.

Dans cette démonstration, on utilise pour des raisons de commodité l'espace universel du calcul barycentrique qui est décrit dans tous les manuels cités dans la bibliographie. L'intérêt de cet espace vectoriel est de faire de l'algèbre linéaire avec des points pondérés et des vecteurs (points de poids nuls). Pour bien comprendre l'utilisation de cet espace, le livre le plus utile est [IREM], car il contient trois descriptions de cet espace universel et de nombreux exercices et applications.

Théorème : On suppose que A, B, C et A', B', C' sont six points distincts du plan formant deux triangles ABC et $A'B'C'$. (BC) et $(B'C')$ se coupent en L, (CA) et $(C'A')$ se coupent en M et (AB) et $(A'B')$ se coupent en N. On supposera, de plus, pour simplifier, les trois points L , M, N distincts.
Alors L, M, N sont alignés si et seulement si les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles.

Supposons d'abord (AA'), (BB'), (CC') concourantes ou parallèles. Dans l'espace universel du calcul barycentrique cela signifie qu'il y a un "vecteur" (point ou vecteur de la géometrie affine) commun aux trois sous-espace Vect$(A,\ A')$, Vect$(B,\ B')$ et Vect$(C,\ C')$. ceci se traduit par une égalité du type :

$$\alpha A + \alpha' A' = \beta B + \beta' B' = \gamma C + \gamma' C'$$

avec le poids $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma'$, égal à 1 si c'est un point, ou nul si c'est un vecteur. On en déduit

- le point L, pondéré, commun à (BC) et $(B'C')$:

  $$(\beta - \gamma)L = \beta B - \gamma C = -\beta' B' + \gamma' C'$$

  NB : $\beta \neq \gamma$ sinon cette égalité serait une égalité de vecteurs et (BC) et $(B'C')$ seraient parallèles.

- le point M, pondéré, commun à (CA) et $(C'A')$:

  $$(\gamma - \alpha)M = \gamma C - \alpha A = -\gamma C' - \alpha A'$$

  NB : De même, $\gamma - \alpha \neq 0$ sinon (AC) et $(A'C')$ seraient parallèles.

- Le point N, pondéré commun à (AB) et $(A'B')$, barycentre de L et M donc aligné avec L et M :

  $$(\beta - \alpha)N = (\beta - \gamma)L + (\gamma - \alpha)M = \beta B - \alpha A = \alpha' A' - \beta' B'$$

  NB : On a encore, $\beta - \alpha \neq 0$ sinon (AB) et $(A'B')$ seraient parallèles.

Ceci prouve que L, M, N sont alignés.

Réciproquement, supposons que les trois points L, M, N soient alignés. Ecrivons chacun des trois points L, M, N comme barycentre de poids 1.

$$\begin{aligned} L &= b_1B + c_1C = b'_1B' + c'_1C' \quad \text{avec } b_1 + c_1 = b'_1 + c'_1 = 1 \\ M &= c_2C + a_2A = c'_2C' + a'_2A' \quad \text{avec } c_2 + a_2 = c'_2 + a'_2 = 1 \\ N &= a_3A + b_3B = a'_3A' + b'_3B' \quad \text{avec } a_3 + b_3 = a'_3 + b'_3 = 1 \end{aligned}$$

Transformons ces égalités barycentriques pour obtenir des informations sur les droites (AA'), (BB') et (CC').

$$\begin{aligned} b_1B - b'_1B' &= c'_1C' - c_1C \\ a_2A - a'_2A' &= c'_2C' - c_2C \\ a_3A - a'_3A' &= b'_3B' - b_3B \end{aligned}$$

Or les trois points L, M, N sont alignés et distincts. Donc N est barycentre de L et M, c'est à dire :

$$N = \lambda L + (1-\lambda)M \text{ avec } \lambda \neq 0 \text{ et } (1-\lambda) \neq 0$$

Comme A, B, C (respectivement A', B', C') forment un vrai triangle donc un repère barycentrique on en déduit l'égalité des coordonnees de $\lambda L + (1-\lambda)M$ et de N dans chacun des repères. En particulier

$$a_3 = (1-\lambda)a_2, \quad a'_3 = (1-\lambda)a'_2$$

$$b_3 = \lambda b_1, \quad b'_3 = \lambda b'_1$$

On en déduit :

$$a_3A - a'_3A' = -b_3B + b'_3B' = \lambda c_1C - \lambda c'_1C'$$

Ce qui montre que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles.

Plus précisément, si $a_3 = a'_3$, les dernières égalités sont des égalités entre vecteurs non nuls :

$$-a_3\overrightarrow{AA'} = b_3\overrightarrow{BB'} = -\lambda c_1\overrightarrow{CC'}$$

Dans ce cas les droites sont parallèles. (Ces vecteurs sont non nuls car sinon on aurait $a_3 = a'_3 = 0$ et $N = B = B'$. Les points B et B' seraient confondus.)

Si $a_3 \neq a'_3$, les trois droites sont concourantes au point

$$\frac{1}{a_3 - a'_3}\,(a_3A - a'_3A') = \frac{1}{b'_3 - b_3}\,(b'_3B' - b_3B) = \frac{1}{c_1 - c'_1}\,(c_1C - c'_1C').$$

Références

[Ber] M.Berger, Géométrie.

[Gob] R.Goblot, Thèmes de géométrie.

[IREM] IREM de Strasbourg, Le livre du problème, volume 5.

[Fr] J.Frenkel, Géométrie pour l'èlève professeur.