**Groupe des isométries laissant globalement invariant un tétraèdre régulier**

Par CHAIRA Karim

Le but de ce thème est d'essayer de donner un modèle sur le groupe des isométries laissant globalement invariant un tétraèdre régulier, afin que les élèves des classes préparatoires puissent assimiler les notions suivantes : isométries d'un espace affine euclidien dans lui même , homomorphismes des groupes et groupes des permutations ; et reconnaître en détails toutes les isométries possibles laissant globalement invariant un tétraèdre régulier.

On désigne par ABCD un tétraèdre régulier d'un espace affine euclidien E de dimension trois, par G le groupe des isométries laissant globalement invariant le tétraèdre ABCD, par $S_4$ l'ensemble des permutations des quatre points A, B, C, D de E et par T l'ensemble {A,B,C,D}.

**I- Isomorphisme des groupes (G , o) et ($S_4$ , o) :**

**1- Remarques :**

**.** L'ensemble des permutations $S_4$ muni de la loi de composition «o », est un groupe.

**.** Le nombre d'éléments de $S_4$ est 4! = 24.

**.** L'ensemble G est non vide car l'application identité $id_E$ appartient à G.

**.** Soit O le centre de gravité du tétraèdre ABCD, si $f \in G$ alors f(O) = O.

**.** Si $f \in G$ alors T = {f(A), f(B), f(C), f(D)}.

**.** Si $f \in G$ telle que f(M) = M pour tout $M \in T$, alors f est l'application identité de E.

En effet, on suppose qu'il existe $N \in E$ tel que $f(N) \neq N$. Les points A, B, C et D appartiennent au plan médiateur du segment [Mf(M)] , car AM = Af(M) , BM = Bf(M) et DM = Df(M) ; absurde.

**2- (G , o) isomorphe au groupe ($S_4$ , o) :**

On considère la relation suivante :

$\varphi : (G , o) \to (S_4 , o)$

$f \to \varphi(f)$ où $\varphi(f)(M) = f(M)$ pour tout $M \in T$.

**2.1- φ est un homomorphisme injectif :**

**.** φ est bien définie, car si $(f,g) \in G^2$ tel que $\varphi(f) \neq \varphi(g)$, il existe $M \in T$ tel que $f(M) \neq g(M)$, donc $f \neq g$.

**.** φ est un homomorphisme de (G , o) dans ($S_4$ , o), car si $(f,g) \in G^2$ et $M \in T$ :

$[\varphi(f) \circ \varphi(g)](M) = \varphi(f)[\varphi(g)(M)] = \varphi(f)[g(M)] = f[g(M)] = (fog)(M) = \varphi(fog)(M)$. Donc $\varphi(f) \circ \varphi(g) = \varphi(fog)$.

**.** φ est injective, car si $f \in G$ tel que $\varphi(f) = id_T$ , alors $\varphi(f)(M) = M$ pour tout $M \in T$ c'est-à-dire f(M) = M pour tout $M \in T$. Donc $f = id_E$

**2.2- φ est surjective de G vers $S_4$ :**

**1ère étape** : Chaque permutation de $S_4$ est composée de transpositions. (par définition : une transposition est une permutation de $S_4$ qui échange deux éléments de T et laisse les autres fixes). En effet, soit τ un élément de $S_4$ :

**.** Si $\tau = id_T$ alors $\tau = \tau_{ij} \circ \tau_{ji}$ où $\tau_{ij}$ désigne la transposition qui échange les éléments distincts i et j de T et laisse les autres fixes.

**.** Si τ est une transposition, alors il existe deux éléments distincts i et j de T tels que $\tau = \tau_{ij}$.

**.** Si τ est une permutation laissant un seul élément de T fixe, alors il existe quatre éléments i, j, k et l de T distincts deux à deux tels que τ(i) = j, τ(j) = k, τ(k) = i et τ (l) = l . Donc $\tau = \tau_{ij} \circ \tau_{jk}$.

**.** Si τ échange les quatre éléments de T deux à deux c'est-à-dire τ(i) = j, τ(j) = i, τ(k) = l et τ (l) = k, alors $\tau = \tau_{ij} \circ \tau_{kl}$.

**.** Si τ échange les quatre éléments de T successivement c'est-à-dire τ(i) = j, τ(j) = k, τ(k) = l et τ(l) = i, alors $\tau = \tau_{ij} \circ \tau_{jk} \circ \tau_{kl}$.

**2ème étape** : Soit τ une transposition telle que τ(C) = D, τ(D) = C, τ(A) = A et τ (B) = B. Soit f la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur du segment [C D].

Les sommets A et B du tétraèdre, appartiennent à ce plan, car le tétraèdre ABCD est régulier. Donc f(A) = A, f(B) = B, f(C) = D et f(D) = C, et par suite φ(f) = τ. On procède de la même façon pour les autres transpositions.

**3ème étape** : D'après la première étape, chaque permutation de $S_4$ est la composée des transpositions $\tau_1,...,\tau_k$ où $k \in \{1,2,3\}$ : $\tau = \tau_1 o...o\tau_k$. D'après la deuxième étape, pour chaque transposition $\tau_i$ $(1 \le i \le k)$ il existe un élément $f_i$ de G tel que $\varphi(f_i) = \tau_i$ . Donc $\varphi = \tau_1 o...o\tau_k = \varphi(f_1)o...o\varphi(f_k) = \varphi(f_1o...of_k) = \varphi(f)$ où $f = f_1o...of_k$ est un élément de G.

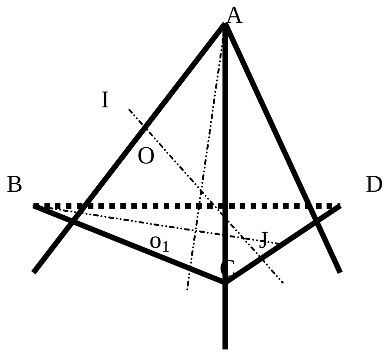
D'où φ est surjective de G vers $S_4$.

**3- Conclusion :**

(G , o) est isomorphe au groupe ($S_4$ , o) , donc (G , o) est un groupe et card (G) = 24.

**II- Nature des éléments de G :**

Soient I et J les milieux des segments [AB] et [CD] respectivement.
La droite (I J) est la perpendiculaire commune des droites (AB) et (CD), et le centre de gravité O est le milieu du segment [I J], car le tétraèdre ABCD est régulier.
Soit $O_1$ le centre de gravité du triangle BCD, la droite $(AO_1)$ est perpendiculaire au plan (BCD) et contient le centre O.




**1- Les isométries de G qui laissent trois sommets fixes :**

Ces isométries sont associées aux permutations de $S_4$ qui laissent trois éléments de T fixes. Or, il n'y a qu'une seule permutation laissant fixes trois éléments de T, c'est l'application identité $id_T$. Donc la seule isométrie de G qui laissent trois sommets fixes, est l'application identité de E.

**2- Les isométries de G qui laissent deux sommets fixes (et échange les deux autres sommets) :**

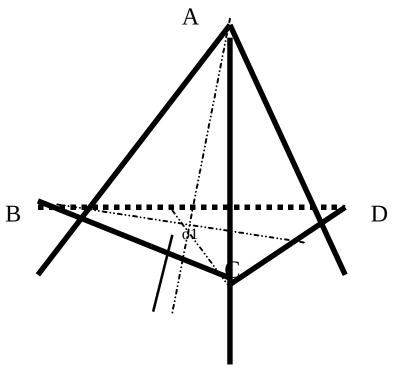
Ces isométries sont associées aux transpositions de $S_4$. Il y a $C_4^2 = 6$ transpositions de $S_4$. En posant $\tau_{MN}$ la transposition qui échange deux points M et N de T, les transpositions de $S_4$ sont $\tau_{AB}$, $\tau_{AC}$, $\tau_{AD}$, $\tau_{BC}$, $\tau_{BD}$ et $\tau_{CD}$. Donc les isométries de G associées à ces transpositions, sont les symétries orthogonales par rapport aux plans médiateurs des segments [AB], [AC], [AD], [BC], [BD] et [CD] respectivement.

**3- Les isométries de G qui laissent un seul sommet fixe :**

Ces isométries sont associées aux permutations de $S_4$ qui laissent un seul élément de T fixe.
Chaque permutation laissant fixe un seul élément de T, est la composée de deux transpositions différentes.
On considère par exemple la permutation $\sigma$ telle que $\sigma$ (A) = A, alors $\sigma = \tau_{BC} \circ \tau_{BD}$ ou $\sigma = \tau_{BD} \circ \tau_{BC}$ (on peut vérifier que $\tau_{BC} \circ \tau_{BD} = \tau_{BD} \circ \tau_{DC} = \tau_{CD} \circ \tau_{BC}$ et $\tau_{BD} \circ \tau_{BC} = \tau_{BC} \circ \tau_{CD} = \tau_{CD} \circ \tau_{BD}$).
Donc l'isométrie de G associe à la permutation $\sigma$, est la composée de deux symétrie orthogonales par rapport aux plans médiateurs des segments [BC] et [BD]. Ces deux plans se rencontrent suivant la droite (OA).

Ainsi l'isométrie associée à $\tau_{BD} \circ \tau_{BC}$ est la rotation d'axe (OA) et d'angle $\widehat{\overrightarrow{O_1B},\overrightarrow{O_1C}}$, et l'isométrie associée à $\tau_{BC} \circ \tau_{BD}$ est la rotation d'axe (OA) et d'angle $\widehat{\overrightarrow{O_1C},\overrightarrow{O_1B}}$, où $\widehat{\overrightarrow{O_1B},\overrightarrow{O_1C}} \equiv \pm 2\pi/3 \ [2\pi]$.

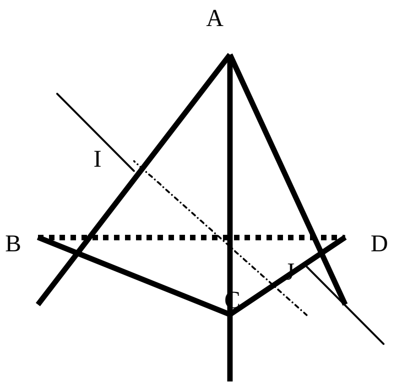
**.** On note par r( (OA) , $\theta$ ) la rotation d'axe (OA) et d'angle $\theta \equiv \widehat{\overrightarrow{O_1B},\overrightarrow{O_1C}} \ [2\pi]$ . r(A) = A, r(B) = C, r(C) = D, r(D) = B et r(ABCD) = ABCD.



De la même manière on obtient les deux rotations de même axe (OB) et d'angles $2\pi/3$ , $-2\pi/3$ qui laissent le sommet B fixe.
Et les deux rotations de même axe (OC) et d'angles $2\pi/3$ , $-2\pi/3$ qui laissent le sommet C fixe. Et les deux rotations de même axe (OD) et d'angles $2\pi/3$ , $-2\pi/3$ qui laissent le sommet D fixe.
Ainsi, il y a huit rotations laissant globalement invariant le tétraèdre ABCD.

### 4- Les isométries de G qui échangent les sommets de tétraèdre ABCD deux à deux :

Ces isométries sont associées aux permutations de $S_4$ qui échangent les éléments de T deux à deux.
Ces permutations sont $\tau_{AB} \circ \tau_{CD}$, $\tau_{AC} \circ \tau_{BD}$, $\tau_{BC} \circ \tau_{AB}$. (On peut vérifier que $\tau_{AB} \circ \tau_{CD} = \tau_{CD} \circ \tau_{AB}$ , $\tau_{AC} \circ \tau_{BD} = \tau_{BD} \circ \tau_{AC}$ et $\tau_{BC} \circ \tau_{AD} = \tau_{AD} \circ \tau_{BC}$ ).
On considère la permutation $\tau = \tau_{AB} \circ \tau_{CD}$. L'isométrie associé à $\tau$ est la composée de deux symétries orthogonales par rapport aux deux plans médiateurs des segments [AB] et [CD]. Ces deux plans s'intersectent suivant la droite (IJ). Donc , cette isométrie est la rotations d'axe (I J) et d'angle $\widehat{\overrightarrow{OI}\,,\ \overrightarrow{OJ}} \equiv \pi\ [\pi]$, c'est-à-dire le demi-tour d'axe(I J).

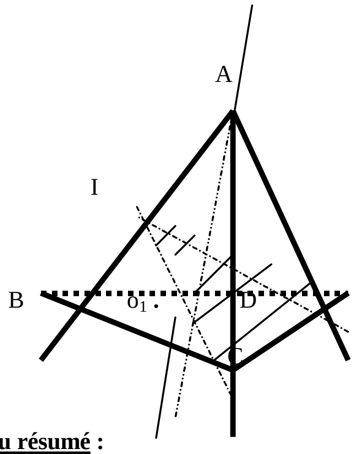



De la même manière, on obtient l'isométrie associée à $\tau_{AC} \circ \tau_{BD}$ et l'isométrie associée à $\tau_{BC} \circ \tau_{AD}$.
Ainsi, il y a trois demi-tours d'axe les perpendiculaires communes aux segments opposés.

### 5- Les autres isométries de G :

Ces isométries sont associées aux permutations $\tau$ qui échangent successivement les quatre éléments de T c'est-à-dire $\tau(i) = j$, $\tau(j) = k$, $\tau(k) = l$ et $\tau(l) = i$ où i, j, k, l éléments de T distincts deux à deux. Donc $\tau = \tau_{ij} \circ \tau_{jk} \circ \tau_{kl}$ .
Ces permutations sont : $\tau_{AB} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{CD}$ , $\tau_{AB} \circ \tau_{BD} \circ \tau_{DC}$ , $\tau_{AC} \circ \tau_{CB} \circ \tau_{BD}$ , $\tau_{AC} \circ \tau_{CD} \circ \tau_{DB}$ , $\tau_{AD} \circ \tau_{DB} \circ \tau_{BC}$ et $\tau_{AD} \circ \tau_{DC} \circ \tau_{CB}$.
( On peut vérifier que , $\tau_{AB} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{CD} = \tau_{BC} \circ \tau_{CD} \circ \tau_{DA} = \tau_{CD} \circ \tau_{DA} \circ \tau_{AB} = \tau_{DA} \circ \tau_{AB} \circ \tau_{BC}$ ,
$\tau_{AB} \circ \tau_{BD} \circ \tau_{DC} = \tau_{BD} \circ \tau_{DC} \circ \tau_{CA} = \tau_{DC} \circ \tau_{CA} \circ \tau_{AB} = \tau_{CA} \circ \tau_{AB} \circ \tau_{BD}$ ,
$\tau_{AD} \circ \tau_{DB} \circ \tau_{BC} = \tau_{DB} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{CA} = \tau_{BC} \circ \tau_{CA} \circ \tau_{AD} = \tau_{CA} \circ \tau_{AD} \circ \tau_{DB}$,
$\tau_{AD} \circ \tau_{DC} \circ \tau_{CB} = \tau_{DC} \circ \tau_{CB} \circ \tau_{BA} = \tau_{CB} \circ \tau_{BA} \circ \tau_{AD} = \tau_{BA} \circ \tau_{AD} \circ \tau_{DC}$,
$\tau_{AC} \circ \tau_{CB} \circ \tau_{BD} = \tau_{CB} \circ \tau_{BD} \circ \tau_{DA} = \tau_{BD} \circ \tau_{DA} \circ \tau_{AC} = \tau_{DA} \circ \tau_{AC} \circ \tau_{CB}$
et $\tau_{AC} \circ \tau_{CD} \circ \tau_{DB} = \tau_{CD} \circ \tau_{DB} \circ \tau_{BA} = \tau_{DB} \circ \tau_{BA} \circ \tau_{AC} = \tau_{BA} \circ \tau_{AC} \circ \tau_{CD}$ ).

- Si on prend la permutation $\tau_{AB} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{CD}$ et l'isométrie f associée à cette permutation, alors $f = S_1 \circ S_2 \circ S_3$ où $S_1$, $S_2$ et $S_3$ les symétries orthogonales par rapport aux plans médiateurs de segments [AB], [BC] et [CD] respectivement.
On peut écrire f comme composée d'une rotation axiale et d'une symétrie plane, en effet : puisque $S_2 \circ S_3$ est un déplacement différent de l'application identité $id_E$ et laisse fixe le centre O, donc $S_2 \circ S_3$ est la rotation d'axe (OA) et d'angle $\theta \equiv \widehat{\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1C}}\ [2\pi]$. D'où, $f = S_1 \circ r$ où r est la rotation d'axe (OA) et d'angle $\theta$ .
- De la même manière, on obtient les isométries associées aux autres permutations. Ainsi il y a six isométries qui s'écrivent composée d'une rotation axiale et d'une symétrie plane.




**6- __Tableau résumé__ :**

| Isométrie de G | Nature | Nombre |
|---|---|---|
| Déplacements | L'application identité | 1 |
| | Les rotations d'axes (OA), (OB), (OC), (OD) et d'angles $2\pi/3$, $-2\pi/3$ | 8 |
| | Les demi-tours d'axes les perpendiculaires commune aux cotés opposés | 3 |
| Antidéplacements | Les symétries orthogonales par rapport aux plans médiateurs des segments de tétraèdre. | 6 |
| | Composée d'une symétrie orthogonale plane et d'une rotation axiale. | 6 |
| | | 24 |