LES GROUPES FINIS DE DEPLACEMENTS DE $\mathbb{R}^3$

Par Abderrahim Raïs
Professeur au CPR TANGER

I - Groupe opérant sur un ensemble

Définition 1 : Soient G un groupe et E un ensemble non vide . On dit que G opère sur E s'il existe une application $\Gamma: G \times E \to E$, $(a,x) \to \Gamma(a,x)$ vérifiant : (A_1) $\forall (a,b) \in G^2, \forall x \in E: \Gamma(ab,x) = \Gamma(a,\Gamma(b,x))$

(A_2) $\forall x \in E: \Gamma(e,x) = x$

où e désigne l'élément neutre de G dont l'opération est noté multiplicativement . $\Gamma(a,x)$ sera noté a.x .

Proposition 1: La relation $\mathcal{R}$ définie sur E par : $\forall$ $(x,y) \in E^2$, ($x \mathcal{R} y$) $\Leftrightarrow$ (il existe a dans G tel que y = a.y) , est d'équivalence .

Dém : (évidente) .

Définition 2 : On appelle orbites les classes d'équivalence relatives à la relation $\mathcal{R}$. La classe d'un élément x de E est appelée orbite de x et sera noté O_x ; plus précisement $O_x = \{ a.x / a \in G \}$.

Proposition 2: Pour tout x dans E , l'ensemble $G_x = \{ a \in G / a.x=x \}$ est un sous-groupe de G .

Dém : (évidente) .

Définition 3 : Pour tout x dans E , l'ensemble G_x est appelé le stabilisateur de x .

Théorème 1 : Soient G un groupe fini opérant sur un ensemble E et x un élément de E .

On a alors : Card G = Card G_x Card O_x .

Dém : On considère l'application $\varphi : G \to O_x$, $a \to a.x$; φ est surjective et par suite $\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right)_{y\in O_x}$ constitue une partition de G . D'autre part , pour tout y dans O_x , $\mathrm{Card}\varphi^{-1}(\{y\}) = \mathrm{Card}G_x$. En effet : soit y un élément de O_x ; alors il existe b dans G tel que : y = b.x . Considérons l'application f définie de : $\varphi^{-1}(\{y\}) \to G_x$, par : $a \to a^{-1}b$.

i - Pour $a \in \varphi^{-1}(\{y\})$, a.x = φ(a) = y = b.x , d'où $(a^{-1}b).x = x$, c'est à dire $a^{-1}b \in G_x$. Ceci assure que f est bien définie .

ii - Pour a_1 , a_2 $\in \varphi^{-1}(\{y\})$, si $f(a_1) = f(a_2)$, $a_1^{-1}b = a_2^{-1}b$ et par suite : $a_1 = a_2$. On en déduit que f est injective .

iii - Considérons enfin c dans G_x . En particulier $c^{-1} \in G_x$ et $c^{-1}.x = x$ d'où $\varphi(bc^{-1}) = b.x = y$; on en déduit que $bc^{-1} \in \varphi^{-1}(\{y\})$ et que $c = (bc^{-1})^{-1}b = f(bc^{-1})$. f est donc surjective

En résumé f réalise une bijection de $\varphi^{-1}(\{y\})$ dans G_x pour tout y dans O_x . Il en découle $\mathrm{Card}\varphi^{-1}(\{y\}) = \mathrm{Card}G_x$ pour tout y dans O_x puis le résultat annoncée .

Corollaire : Si E et G sont finis on a : $\mathrm{Card}E = \sum_{x\in S} \frac{\mathrm{Card}G}{\mathrm{Card}G_x}$, où S est un ensemble de représentant unique de chaque orbite .

Dém : Le résultat découle du fait que l'ensemble des orbites constitue une partition de E .

II - Groupes finis de déplacements dans $\mathbb{R}^3$ euclidien

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine euclidienne usuelle . G désigne un sous-groupe fini du groupe de déplacements de $\mathbb{R}^3$, d'ordre $n \geq 2$.

Théorème 2 : Il existe un point O invariant par tous les éléments de G .

Dém : Considérons un point A de $\mathbb{R}^3$ et définissons O l'isobarycentre de la famille $(f(A))_{f\in G}$. Si $g \in G$, g est affine et donc g(O) est l'isobarycentre de la famille $(g \circ f(A))_{f\in G} = (f(A))_{f\in G}$, car l'application $G \to G$, $f \to g \circ f$ est bijective . Par suite O est stable par tous les éléments de G .

Corollaire : Tous les éléments de G sont des rotations autour d'axes passant par O .

Notation et vocabulaires :
i - On notera S la sphère unité de centre O .
ii - Nous appellerons rotation propre une rotation distincte de $Id_{\mathbb{R}^3}$. Elle laisse invariant deux points P et P' de S diamétralement opposés qui seront appelés pôles de cette rotation ; son axe est PP' .
iii - On notera E l'ensemble des pôles des rotations propres de G .

Proposition 3: L'application : $G \times E \to E$, $(f , P) \to f(P)$ fait opérer G sur E .

Dém : (évidente)

Définition 3 : On appelle ordre d'un pôle P de E le nombre de rotation dont P est pôle , en y comprenant $Id_{\mathbb{R}^3}$.

La définition qui précède permet de voir que l'ordre k d'un pôle P est le cardinal de G_P , le stabilisateur de P . P étant un élément de E , il existe dans G_P une rotation propre , ce qui assure que $k \geq 2$. Posons r = Card O_P , O_P étant l'orbite de P ; on a d'après le théorème 1 : n = kr . Notons N le nombre d'orbites , r_j le cardinal de la j-ième orbite O_j pour $1 \leq j \leq N$; les éléments de celle ci sont des pôles P_{ji} , $1 \leq i \leq r_j$ qui ont le même ordre $k_j = \frac{n}{r_j}$. Le nombre de rotations propres de pôles P_{ji} est $k_j - 1 = \frac{n}{r_j} - 1$, pour $1 \leq j \leq N, 1 \leq i \leq r_j$. Nous allons déterminer de deux manières différentes le cardinal de l'ensemble : $F = \left\{(r, P) \in G \times E \,/\, r \neq Id_{\mathbb{R}^3}, r(P) = P\right\}$. On a tout d'abord Card F = 2(n-1) car chaque rotation propre possède 2 pôles . D'autre part chaque élément de l'orbite O_j est pôle de $k_j - 1$ rotations propres et comme Card $O_j = r_j$, on a :

$\text{Card}F = \sum_{j=1}^{N} r_j(k_j - 1) = 2(n-1)$, ou encore $\sum_{j=1}^{N} \frac{n}{k_j}(k_j - 1) = 2(n-1)$, c'est à dire : **(1)** $\sum_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{k_j}\right) = 2(1 - \frac{1}{n})$.

Comme $n \geq 2$ et $k_j \geq 2$ on a : $1 \leq 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2$ puis $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{k_j} < 1$, pour tout $1 \leq j \leq N$ et donc $\frac{N}{2} \leq \sum_{j=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{k_j}\right) < N$. On voit alors que : $\frac{N}{2} \leq \sum_{j=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{k_j}\right) < 2$ et $1 \leq \sum_{j=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{k_j}\right) < N$, d'où on en déduit que $2 \leq N \leq 3$.

En conclusion l'action de G sur E ne peut avoir que 2 ou 3 orbites . Nous traiterons donc ces deux cas :

Premier cas , N = 2 : la relation **(1)** s'écrit $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{n}$, soit $r_1 + r_2 = 2$. Il en découle $r_1 = \frac{n}{k_1} = 1$ et $r_2 = \frac{n}{k_2} = 1$, c'est à dire que E est constitué de deux pôles P et P' d'ordre n . G est alors un sous-groupe du groupe des rotations d'axes PP' . Considérons l'application φ de G dans $\mathbb{U}$: $r \to e^{i\theta}$, ou $\mathbb{U}$ est le groupe des nombres complexes de module 1 , θ étant la mesure de l'angle de r . φ est un morphisme de groupe injectif ; il en résulte que G est isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$, d'où G est un sous-groupe cyclique d'ordre n .

Deuxième cas , N = 3 : La relation **(1)** s'écrit $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = 1 + \frac{2}{n}$. On a donc : $1 < \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \leq 2$; supposons quitte à renuméroter que $k_1 \leq k_2 \leq k_3$. Il vient : $1 < \frac{3}{k_1}$, c'est à dire $k_1 = 2$ puis grâce à **(1)** : $\frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$, c'est à dire : $\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} > \frac{1}{2}$; en particulier $\frac{2}{k_2} > \frac{1}{2}$, d'où $k_2 \in \{2,3\}$. Traitons les deux cas :

1 - $k_2 = 2$; il vient $n = 2k_3$ et par suite n est un entier pair ≥ 4 . On en déduit que $r_1 = r_2 = n/2$, $r_3 = 2$.

1 - a Examinons d'abord le cas n = 4 ; on a : $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ et tous les éléments de $G \setminus \left\{Id_{\mathbb{R}^3}\right\}$ sont d'ordre 2 . Ce sont donc des demi-tours autour d'axes passant par O , qui sont nécessairement 2 à 2 perpendiculaires . Si on compose deux de ces demi-tours , on retrouve le troisième . G est engendré par 2 de ces demi-tours .

1 - b n est pair ≥ 6 ; L'orbite O_3 possède 2 éléments P et P' diamètralement opposé ; en effet si P'' est le symétrique de P par rapport à O et P''∈ $O_1 \cup O_2$, P'' est d'ordre 2 . Mais deux pôles diamétralement opposés ont le même ordre car ils ont le même stabilisateur , d'où $2 = \frac{n}{2} \geq 3$, ce qui constitue une contradiction . G_P est un groupe fini de rotations autour de l'axe PP' .

En raisonnant comme dans le premier cas , nous déduisons que G_P est un groupe cyclique engendré par une rotation autour de PP' d'ordre n/2 .

Considérons σ un élément de $G \backslash G_P$; en particulier $\sigma(P) \neq P$ et $\sigma(P) \in O_3$, d'où on en déduit que $\sigma(P) = P'$. Donc σ est un demi-tour dont l 'axe est une droite passant par O , perpendiculaire à PP' . L'ensemble $G_P \cup \sigma G_P$ contient n éléments , d'où on peut écrire que : $G = G_P \cup \sigma G_P$ et que G est engendré par 2 éléments : une rotation d'ordre n/2 et un demi-tour .

Si S est l'ensemble de n/2 sommets d'un polygone régulier de centre O du plan perpendiculaire à PP' passant par O , alors G est le groupe de déplacements qui laissent invariant les sommets de S (voir figure 1) .

2 - $k_2 = 3$; il vient $\frac{1}{k_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n} > \frac{1}{6}$, soit $k_3 < 6$. Comme $k_2 \leq k_3$, on en déduit que $k_3 \in \{3 , 4 , 5\}$.

2 - a Traitons le cas $k_3 = 3$; on a : $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, n = 12 . L'orbite O_2 contient 4 éléments {A , B , C , D} ; O_2 est globalement invariante par tout les éléments de G , en particulier par les éléments de G_A , qui est d'ordre 3 donc cyclique . Les éléments de G_A sont $Id_{\mathbb{R}^3}$ et les deux rotations d'axe OA et d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$. Chacune de ces rotations fixe A et permute B , C et D , d'où BCD est un triangle équilatéral situé dans un plan perpendiculaire à la droite OA (voir figure 2) . Le raisonnement fait pour A peut être fait aussi pour B , C et D . Il en résulte que ABCD est un tétraèdre régulier de centre O .

Comme le groupe des déplacements qui laissent invariant les quatre sommets d'un tétraèdre régulier est d'ordre 12 , il est égale à G .

2 - b $k_3 = 4$; on a : $k_1 = 2$ et $k_2 = 3$ d'où n = 24 . L'orbite O_3 a 6 éléments ; si $A \in O_3$ son symétrique A' par rapport à O est aussi dans O_3 , car A et A' sont d'ordre 4 puisqu'ils ont le même stabilisateur et donc A' ne peut être ni dans O_1 , dont les éléments sont d'ordre 2 , ni dans O_2 , dont les éléments sont d'ordre 3 . On en déduit que O_3 est symétrique par rapport à O . Notons A , B , C , A' , B' , C' les 6 éléments de O_3 avec A' , B' , C' les symétriques respectifs de A , B , C par rapport à O . Le stabilisateur G_A est d'ordre 4 ; plus précisément il est cyclique , possède une rotation d'axe OA et d'angle $\pi/2$, qui stabilise l'ensemble {B , B' , C , C'} . Il en découle que BCB'C est un carré contenu dans le plan perpendiculaire en O à OA (car B et B' sont symétriques par rapport à O) . (voir figure 3)
On peut effectuer sur B et C le même travail ; on en déduit que O_2 est l'ensemble des 6 sommets d'un octaèdre régulier . Par suite G stabilise les 6 sommets d'un octaèdre régulier , et aussi les centres de 8 triangles équilatéraux de l'octaèdre . Ces centres sont les 8 sommets d'un cube laissé stable par G . Comme le groupe de déplacements qui laissent invariants les sommets d'un cube est d'ordre 24 , il coïncide avec G .

2 - c $k_3 = 5$; on a : $k_1 = 2$ et $k_2 = 3$ d'où n = 60 . L'orbite O_3 a 12 éléments . O_3 est symétrique par rapport à O (même raisonnement que précédemment) . Considérons I et J des éléments de O_3 symétriques par rapport à O . G_I est d'ordre 5 , donc cyclique ; il possède une rotation r d'ordre 5 et d'axe IJ . Cette rotation stabilisant O_3 , stabilise donc les 10 éléments de O_3 , autre que I et J . On en déduit que ces 10 éléments sont les sommets de 2 pentagones réguliers symétriques par rapport à O et situés dans des plans perpendiculaires à IJ (si $P \in O_3 \backslash \{I , J\}$, Card $\{P , r(P) , r^2(P) , r^3(P) , r^4(P)\} = 5$ et $r^5(P) = P$) .
Notons $A_1A_2A_3A_4A_5$ un pentagone et $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$ son symétriques par rapport à O . (voir figure 4)
Le raisonnement mené avec I , J peut être mené avec toute autre paire d'éléments de O_3 , symétriques par rapport à O , A_1 , A'_1 , A_2 , A'_2 , etc. ... O_3 est alors l'ensemble des 12 sommets d'un icosaèdre régulier ; le groupe de déplacements qui stabilise l'icosaèdre régulier est d'ordre 60 , donc il est égal à G .

Théorème 3 : Si G est un groupe fini d'ordre $n \geq 2$ de déplacements de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, il existe O un point invariant par tous les éléments de G , et en outre G est l'un des groupes suivants :
1 - G est cyclique , engendré par une rotation d'ordre n autour d'un axe passant par O .
2 - n = 4 ; G est un groupe formé par $Id_{\mathbb{R}^3}$ et 3 demi-tours d'axes 2 à 2 perpendiculaires .
3 - n est pair ≥ 6 ; G est un groupe de déplacements qui laissent stables un polygone régulier de centre O à n/2 sommets .
4 - G est un groupe de déplacements qui laissent stable un tétraèdre régulier .
5 - G est un groupe de déplacements qui laissent stable un cube .

Bibliographie :
[1] L . Lesieur : *Compléments d'algèbre linéaire* .
[2] J . C . Carrega : *Algèbre , arithmétique , géométrie* (polycopié) .