UN THÉORÈME DE BRAUER

par

Stef Graillat

Le théorème de Brauer montre que deux permutations sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutations associées sont aussi conjuguées. Il trouve donc naturellement sa place dans les leçons

- 106 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 120 : Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.

Le démonstration que nous donnons ici est très largement inspirée de [**FR01**].

Faisons tout d'abord quelques rappels sur les matrices de permutations. On appelle *matrice de permutation* associées à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ la matrice de $\mathrm{M}(n, \mathbf{K})$, notée P_σ, définie par $\mathrm{P}_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$. Soit $\mathscr{E} = (e_i)_{i=1,\dots,n}$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$ et $u_\sigma : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$, $(e_i) \mapsto (e_{\sigma^{-1}(i)})$. On remarque sans trop de difficultés que $\mathrm{P}(\sigma) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u_\sigma)$. Une matrice de permutation est donc toujours *inversible* car envoyant une base sur une autre base. Si σ_1 et σ_2 sont deux permutations de $\mathfrak{S}$, on a $u_{\sigma_1\sigma_2} = u_{\sigma_2} \circ u_{\sigma_1}$ (en effet, $u_{\sigma_2} \circ u_{\sigma_1}(e_i) = u_{\sigma_2}(e_{\sigma_1^{-1}(i)}) = e_{\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(i)} = e_{(\sigma_1\sigma_2)^{-1}(i)} = u_{\sigma_1\sigma_2}(e_i)$). On en déduit alors que $\mathrm{P}_{\sigma_1\sigma_2} = \mathrm{P}_{\sigma_2}\mathrm{P}_{\sigma_1}$ et que $\mathrm{P}_{\sigma^{-1}} = \mathrm{P}_\sigma^{-1}$. On vérifie aussi que $\det \mathrm{P}_\sigma = \varepsilon(\sigma)$ (où ε est la *signature*).

Nous aurons besoin, dans la démonstration du théorème de Brauer, du lemme fondamental suivant (tiré de [**CL04**]).

LEMME. — *À toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on associe la partition $\pi(\sigma)$ de n formée par la suite croissante des longueurs des cycles qui interviennent dans sa décomposition en produit de cycles disjoints. Alors deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles définissent la même partition.*

Démonstration. — Si $\tau = \gamma\sigma\gamma^{-1}$ et soit $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r$ la décomposition de σ en cycles à support disjoint. On a alors

$$\tau = \gamma\sigma_1 \cdots \sigma_r\gamma^{-1} = \underbrace{\gamma\sigma_1\gamma^{-1}}_{\tau_1}\underbrace{\gamma\sigma_2\gamma^{-1}}_{\tau_2}\cdots\underbrace{\gamma\sigma_r\gamma^{-1}}_{\tau_r} = \tau_1\tau_2\cdots\tau_r.$$

où σ_i et τ_i sont des cycles de même longueur.

Réciproquement, soit $(m_1;\dots;m_r)$ la partition associée à σ et à τ. On peut ainsi décomposer $\sigma = (i_{1,m_1},\dots,i_{1,m_r})\cdots(i_{r,1},\dots,i_{r,m_r})$ et pareil pour τ avec $j_{k,p}$. Soit γ la permutation qui envoie $i_{k,p}$ sur $j_{k,p}$. Alors si $1 \leqslant p < m_k$, on a $\gamma\sigma\gamma^{-1}(j_{k,p}) = \gamma\sigma(i_{k,p}) = \gamma(i_{k,p+1}) = j_{k,p+1}$ tandis que $\gamma\sigma\gamma^{-1}(j_{k,m_k}) = \gamma\sigma(i_{k,m_k}) = \gamma(i_{k,1}) = j_{k,1}$ ce qui montre que $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \tau$. □

THÉORÈME (Brauer). — *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps de* caractéristique nulle. *Pour* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, *notons* $\mathrm{P}(\sigma) \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ *la matrice associée à la permutation de la base canonique de* $\mathbf{K}^n$. *Pour que deux permutations* σ *et* τ *soient conjuguées dans* $\mathfrak{S}_n$, *il faut et il suffit que* $\mathrm{P}(\sigma)$ *et* $\mathrm{P}(\tau)$ *soient conjuguées dans* $\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ *(c'est-à-dire que ces matrices soient semblables sur* $\mathbf{K}$*).*

Démonstration. — Si σ et τ sont conjuguées, alors il existe $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma = \gamma\tau\gamma^{-1}$. On déduit des rappels que $\mathrm{P}(\sigma) = \mathrm{P}(\gamma)^{-1}\mathrm{P}(\tau)\mathrm{P}(\gamma)$. Par conséquent, $\mathrm{P}(\sigma)$ et $\mathrm{P}(\tau)$ sont bien conjuguées dans $\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$.

Réciproquement, si $\mathrm{P}(\sigma)$ et $\mathrm{P}(\tau)$ sont conjugués alors il existe une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ telle que $\mathrm{P}(\tau) = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{P}(\sigma)\mathrm{M}$. Notons $c_k(\sigma)$ le nombre de cycles de longueurs k dans la décomposition de σ. Nous allons montrer que $c_k(\sigma) = c_k(\tau)$ pour tout $k \leqslant n$. Comme $\mathrm{P}(\tau) = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{P}(\sigma)\mathrm{M}$, on en déduit que $\chi_{\mathrm{P}(\tau)} = \chi_{\mathrm{P}(\sigma)}$ (χ représente le *polynôme caractéristique*). Quitte à réordonner l'ordre des vecteurs de base, on peut supposer que

$$\mathrm{P}(\sigma) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_1 & & & (0) \\ & \mathrm{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \mathrm{P}_r \end{pmatrix},$$

où P_i est la matrice de permutation du i-ième cycle dans la décomposition de σ. Soit $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r$ la décomposition en cycle à support disjoint. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(\sigma_i) = \mathrm{P}_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\chi_{\mathrm{P}_i} = \mathrm{X}^m - 1$ où m est la longueur du cycle σ_i. On déduit de cela que l'égalité $\chi_{\mathrm{P}(\tau)} = \chi_{\mathrm{P}(\sigma)}$ équivant à

$$\prod_k (\mathrm{T}^k - 1)^{c_k(\sigma)} = \prod_k (\mathrm{T}^k - 1)^{c_k(\tau)}. \tag{1}$$

Soit maintenant ξ une racine de l'unité d'ordre m dans $\overline{\mathbf{K}}$ (la clôture algébrique de $\mathbf{K}$). Comme $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle, les racines de $\mathrm{T}^k - 1$ sont simples. La multiplicité de ξ dans $\mathrm{T}^k - 1$ est 1 si $\xi^k = 1$, c'est-à-dire si $m \mid k$ et 0 sinon. En regardant la multiplicité de ξ dans (1), il vient

$$\sum_{m|k} c_k(\sigma) = \sum_{m|k} c_k(\tau) \text{ pour tout } m \geqslant 1.$$

Concluons en raison par l'absurde. Supposons qu'il existe un entier m tel que $c_m(\sigma) \neq c_m(\tau)$. Comme la fonction $k \mapsto c_k(\sigma)$ est à support fini, on peut considérer le plus grand entier m_0 tel que $c_{m_0}(\sigma) \neq c_{m_0}(\tau)$. Mais alors d'après (1), on a

$$\sum_{m_0|k} c_k(\sigma) = \sum_{m_0|k} c_k(\tau).$$

par définition de m_0, on a $c_{m_0}(\sigma) = c_{m_0}(\tau)$ (en effet par définition de m_0, on a $c_k(\sigma) = c_k(\tau)$ pour $k > m_0$). □

Remarque. — Cet théorème reste encore vrai si le corps **K** est de caractéristique non nulle mais la démonstration est vraiment différente. On trouva différentes démonstration dans ce cas dans [**FR01**].

Références

[CL04] A. CHAMBERT-LOIR – « Algèbre corporelle », Polycopié de l'École Polytechnique, disponible à l'adresse `http://name.math.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir/publications/teach/algebre.pdf`, 2004.

[FR01] D. FERRAND & J.-C. RAOULT – *Sur un théorème de Brauer*, Université de Rennes I, 2001, disponible à l'adresse `http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/Agreg.Brauer.pdf`.

---

9 décembre 2004

STEF GRAILLAT, Université de Perpignan, 52, avenue Paul Alduy, F-66860 Perpignan Cedex
E-mail : `graillat@univ-perp.fr` • *Url :* `http://gala.univ-perp.fr/~graillat`