Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :

M. Coste

Dualité projective, théorèmes de Menelaüs et de Ceva

Michel Coste - Novembre 2002

Rappelons les énoncés de ces théorèmes.

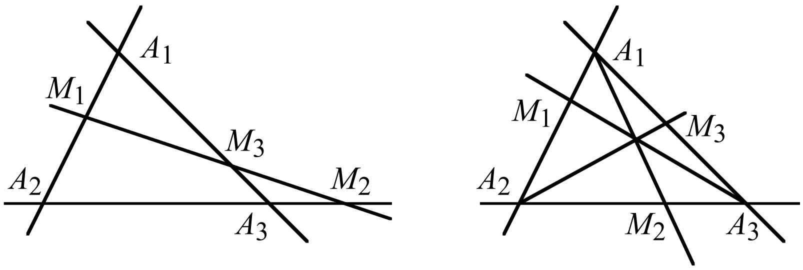
Théorème 1 (Menelaüs) *Soient $A_1A_2A_3$ un triangle, M_1, M_2 et M_3 des points situés respectivement sur les droites A_1A_2, A_2A_3 et A_3A_1, distincts de A_1, A_2, A_3. Les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si*

$$\frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1A_2}} \times \frac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2A_3}} \times \frac{\overline{M_3A_3}}{\overline{M_3A_1}} = 1 \ .$$

Théorème 2 (Ceva) *Soient $A_1A_2A_3$ un triangle, M_1, M_2 et M_3 des points situés respectivement sur les droites A_1A_2, A_2A_3 et A_3A_1, distincts de A_1, A_2, A_3. Les droites A_3M_1, A_1M_2 et A_2M_3 sont concourantes ou parallèles si et seulement si*

$$\frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1A_2}} \times \frac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2A_3}} \times \frac{\overline{M_3A_3}}{\overline{M_3A_1}} = -1 \ .$$

FIG. 1: Les théorèmes de Ceva et Menelaüs



Ces théorèmes sont énoncés dans le cadre affine, et sont assez souvent démontrés en utilisant un calcul barycentrique (voir Audin pages 38 et 273, Berger 2.8.1 et 2.8.2, Fresnel pages 41-42, le texte d'A. Ducros « Exemples d'utilisations des coordonnées barycentriques » sur le site de la préparation – la démonstration utilisant une composition d'homothéties suggérée dans le livre de M. Audin, page 273, est sans doute la plus simple). On a bien envie de dire que ces théorèmes sont duaux (trois points alignés/trois droites concourantes). On se propose ici de montrer effectivement comment ces théorèmes peuvent illustrer la dualité en géométrie projective. Il faut d'abord placer ces théorèmes dans le cadre projectif (la formulation « concourantes ou parallèles » dans le théorème de Ceva nous y invite). On verra en passant comment obtenir une démonstration de ces théorèmes par envoi d'éléments à l'infini. Il y a bien une version « projective » de Menelaüs et Ceva chez Fresnel, pages 90-91, mais elle passe par des coordonnées homogènes qui ne sont vraiment pas loin du calcul barycentrique.

Les théorèmes de Menelaüs et Ceva formulent des équivalences. Nous nous contenterons de discuter une implication (points alignés $\Rightarrow$ produit $= 1$ ou droites concourantes $\Rightarrow$ produit $= -1$). Les implications réciproques sont conséquences de celles-ci.

Rappelons d'abord comment interpréter le rapport de mesures algébriques $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ (où M est un point de la droite affine AB) en termes projectifs, précisément en termes de birapport (voir Audin, pages 150-151). Soit ∞_{AB} le point à l'infini de la droite AB, I le milieu du segment $[AB]$. Alors

$$[A, B, M, \infty_{AB}] = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \qquad \text{et} \qquad [A, B, M, I] = -\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \ .$$

Il est alors facile d'expliciter une version projective de Menelaüs.

Théorème 3 (Menelaüs projectif) *Soient A_1, A_2 et A_3 trois points non alignés du plan projectif, d et d' deux droites distinctes ne passant par aucun des points A_1, A_2 et A_3. Pour $i = 1, 2, 3$, notons M_i (resp. M'_i) le point d'intersection de d (resp. d') avec la droite A_iA_{i+1} (numérotation cyclique modulo 3). Alors*

$$[A_1, A_2, M_1, M'_1] \times [A_2, A_3, M_2, M'_2] \times [A_3, A_1, M_3, M'_3] = 1 \ .$$

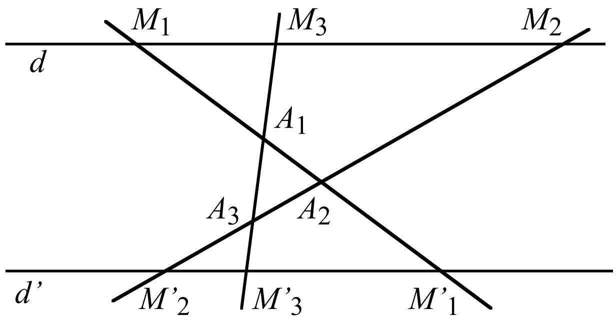
Le passage entre Menelaüs projectif et Menelaüs affine se fait bien sûr en choisissant pour droite de l'infini la droite d'. Mais un autre envoi à l'infini fournit une démonstration assez simple du théorème de Menelaüs (projectif et donc affine). Envoyons le point d'intersection de d et d' à l'infini (on choisit comme droite de l'infini une droite passant par ce point d'intersection et aucun des A_i, M_i ou M'_i) ; on est alors ramené à une situation affine avec d et d' parallèles, et Thalès nous donne

$$\frac{\overline{M_iA_{i+1}}}{\overline{M'_iA_{i+1}}} = \frac{\overline{M_{i+1}A_{i+1}}}{\overline{M'_{i+1}A_{i+1}}} \qquad \text{pour } i = 1, 2, 3 \ .$$

On en déduit immédiatemment l'égalité concernant le produit des trois birapports :

$$\left(\frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1A_2}} \Big/ \frac{\overline{M'_1A_1}}{\overline{M'_1A_2}} \right) \times \left(\frac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2A_3}} \Big/ \frac{\overline{M'_2A_2}}{\overline{M'_2A_3}} \right) \times \left(\frac{\overline{M_3A_3}}{\overline{M_3A_1}} \Big/ \frac{\overline{M'_3A_3}}{\overline{M'_3A_1}} \right) = 1 \ .$$

FIG. 2: Thalès au secours de Menelaüs projectif



(Dans toute la discussion qui précède il faudrait aussi considérer le cas où d et d' se coupent en $M_i = M'_i$ pour un i parmi 1,2,3, mais ce cas ne pose pas problème.)

Maintenant qu'on a une vraie version projective de Menelaüs, on peut énoncer son théorème dual :

Théorème 4 (Menelaüs projectif dual) *Soient A_1, A_2 et A_3 trois droites non concourantes du plan projectif, d et d' deux points distincts situés sur aucune des droites A_1, A_2 et A_3. Pour $i = 1, 2, 3$, notons a_{i-1} le point d'intersection des droites A_i et A_{i+1} et M_i (resp. M'_i) la droite da_{i-1} (resp. $d'a_{i-1}$). Alors*

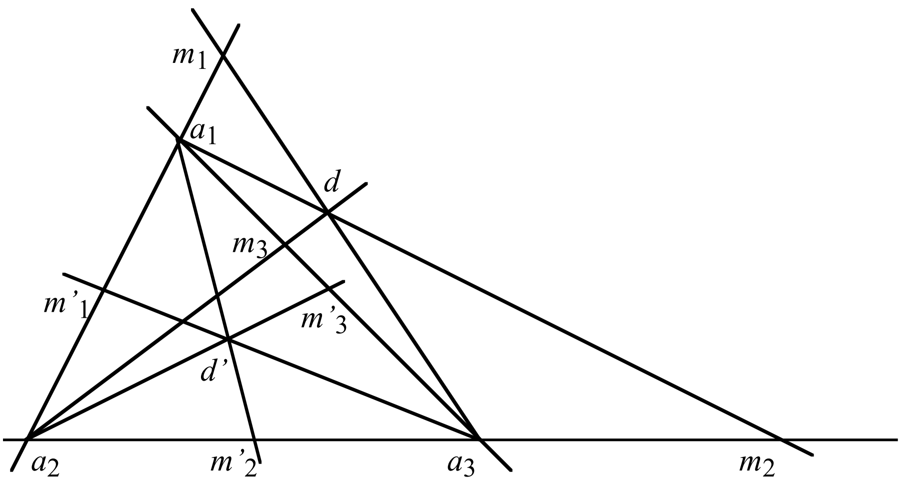
$$[A_1, A_2, M_1, M'_1] \times [A_2, A_3, M_2, M'_2] \times [A_3, A_1, M_3, M'_3] = 1 \ .$$

On a peut-être un peu de mal à reconnaître Ceva sous ce déguisement projectif. Introduisons déjà les points m_i (resp. m'_i) comme intersection de M_i (resp. M'_i) avec A_{i-1}. Le birapport $[A_i, A_{i+1}, M_i, M'_i]$ des quatre droites concourantes est égal au birapport $[a_{i+1}, a_i, m_i, m'_i]$ des quatre points intersections de ces droites avec la droite A_{i-1} (pour le birapport de quatre droites vous pouvez voir Audin, exercice V.14 et V 15 pages 158 et 290, ou Fresnel page 82). Choisissons une droite de l'infini ne passant par aucun des points a_i, m_i, et appliquons le théorème dual en prenant pour d' l'isobarycentre des points a_1, a_2 et a_3 dans le plan affine. Alors m'_i est le milieu de $[a_i a_{i+1}]$ et donc $[a_{i+1}, a_i, m_i, m'_i] = -\dfrac{\overline{m_i a_{i+1}}}{\overline{m_i a_i}}$. On en déduit bien :

$$\frac{\overline{m_1 a_1}}{\overline{m_1 a_2}} \times \frac{\overline{m_2 a_2}}{\overline{m_2 a_3}} \times \frac{\overline{m_3 a_3}}{\overline{m_3 a_1}} = -1 \ .$$

(En fait vous pouvez vérifier que, pour tout d' comme dans le théorème dual, il existe un unique choix de droite à l'infini tel que d' soit l'isobarycentre des a_i dans le plan affine. Ceci montre que Ceva projectif est bien le théorème dual, et pas seulement un cas particulier du théorème dual.)

Fig. 3: Ceva projectif dual de Menelaüs projectif



On trouve quelquefois (par exemple chez Fresnel, page 41) le théorème de Menelaüs formulé sous la forme plus générale suivante :

Théorème 5 (Menelaüs en dimension n) *Soient E un espace affine de dimension n et $(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1})$ un repère affine de E. Pour $i = 1, \ldots, n+1$ soit B_i un point sur la droite A_iA_{i+1} distinct de A_i et A_{i+1} (numérotation cyclique modulo $n+1$). Alors les points $B_1, \ldots, B_{n+1}$ sont sur un même hyperplan de E si et seulement si*

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{\overline{M_iA_i}}{\overline{M_iA_{i+1}}} = 1 \ .$$

Vous pouvez, comme précédemment, projectiviser cet énoncé, le démontrer en utilisant Thalès, passer au dual, et retrouver un « théorème de Ceva en dimension n ». Voici par exemple l'énoncé de Ceva en dimension 4 : Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points non coplanaires dans un espace de dimension 3. Pour $i = 1, \ldots, 4$ soit M_i un point sur la droite A_iA_{i+1} distinct de A_i et A_{i+1}. Alors les plans $A_{i+2}A_{i+3}M_i$ sont concourants ou parallèles à une même droite si et seulement si

$$\frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1A_2}} \times \frac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2A_3}} \times \frac{\overline{M_3A_3}}{\overline{M_3A_4}} \times \frac{\overline{M_4A_4}}{\overline{M_4A_1}} = 1 \ .$$