

DÉVELOPPEMENT 31

SOUS-GROUPES FINIS DE $\mathcal{SO}(3)$

Proposition. — *Si G est un sous-groupe fini de $\mathcal{SO}(3)$ alors G est isomorphe à l'un des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n , A_4 , S_4 ou A_5 .*

Démonstration. —

1. Si g est une rotation non triviale alors il existe deux points P et $-P$, appelés *pôles* de g , sur la sphère unité qui sont stables par g . On note \mathcal{P} l'ensemble des pôles des éléments de $G - \{Id\}$. Puisqu'une rotation est une isométrie, G agit sur la sphère. D'autre part, si $h \in G$ et si P est un pôle de $g \in G$ alors $hgh^{-1}h(P) = hg(P) = h(P)$ i.e. $h(P)$ est un pôle de hgh^{-1} donc G agit sur l'ensemble \mathcal{P} des pôles. Le nombre k d'orbites de cette action vérifie

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \frac{1}{n} (|\mathcal{P}| + 2(n-1))$$

d'où puisque $2 \leq |\mathcal{P}| \leq 2(n-1)$

$$2 \leq k \leq \frac{4(n-1)}{n} = 4\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 4$$

i.e. $k = 2$ ou 3 . Dans le cas où $k = 3$, on note $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et \mathcal{P}_3 les orbites avec $|\mathcal{P}_1| \geq |\mathcal{P}_2| \geq |\mathcal{P}_3|$. Pour $i = 1, 2, 3$, on note m_i l'ordre du stabilisateur d'un point de \mathcal{P}_i (ce qui ne dépend pas du point choisi) alors $m_i |\mathcal{P}_i| = n$ d'où $m_1 \leq m_2 \leq m_3$. Si P est un point de \mathcal{P}_1 alors P est stabilisé par l'identité et par un élément g dont P est un pôle d'où $m_1 \geq 2$. On a $3n = |\mathcal{P}| + 2(n-1)$ i.e. $|\mathcal{P}| = n + 2$ d'où d'après l'équation aux classes

$$n + 2 = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| + |\mathcal{P}_3| = \frac{n}{m_1} + \frac{n}{m_2} + \frac{n}{m_3}$$

i.e.

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 1 + \frac{2}{n}.$$

On a donc $1 < \frac{3}{m_1}$ i.e. $m_1 = 2$, d'où

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{2}{n} + \frac{1}{2}.$$

On a donc $\frac{1}{2} < \frac{2}{m_2}$ i.e. $m_2 = 2$ ou 3 . Lorsque $m_2 = 3$, on obtient

$$\frac{1}{m_3} = \frac{2}{n} + \frac{1}{6}$$

i.e. $m_3 = 3, 4$ ou 5 . Ainsi, on est dans l'un des cas suivants :

- $k = 2$
- $k = 3$ et $m_2 = 2$
- $k = 3$, $m_2 = 3$ et $m_3 = 3$, alors $n = 12$, $|\mathcal{P}_1| = 6$, $|\mathcal{P}_2| = 4$ et $|\mathcal{P}_3| = 4$
- $k = 3$, $m_2 = 3$ et $m_3 = 4$, alors $n = 24$, $|\mathcal{P}_1| = 12$, $|\mathcal{P}_2| = 8$ et $|\mathcal{P}_3| = 6$
- $k = 3$, $m_2 = 3$ et $m_3 = 5$, alors $n = 60$, $|\mathcal{P}_1| = 30$, $|\mathcal{P}_2| = 20$ et $|\mathcal{P}_3| = 12$

2. On considère le cas où il y a $k = 2$ orbites. Alors $|\mathcal{P}| = 2$ et tous les éléments $g \in G$ distincts de l'identité admettent les deux points P et P' pour pôles i.e. ont tous le même axe de rotation donc stabilise tous le plan orthogonal à cet axe. À toute rotation g de G on associe donc canoniquement une

rotation $f(g)$ de ce plan *i.e.* on a un isomorphisme $f : G \rightarrow f(G)$. Ainsi $f(G)$ est un sous-groupe d'ordre n du groupe des rotations de \mathbb{R}^2 donc est un groupe cyclique d'ordre n . On a donc $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3. On considère le cas où il y a $k = 3$ orbites et où $m_1 = m_2 = 2$. On a alors $|\mathcal{P}| = n + 2$ et

$$|\mathcal{P}_3| = |\mathcal{P}| - |\mathcal{P}_1| - |\mathcal{P}_2| = n + 2 - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} = 2.$$

On note P et $-P$ les deux pôles de \mathcal{P}_3 . Le stabilisateur G_P de P est d'ordre $\frac{n}{2}$ et (en raisonnant comme dans le premier cas) est cyclique *i.e.* est isomorphe à $\mathbb{Z}/\frac{n}{2}\mathbb{Z}$. Si $g \in G$ ne stabilise pas P alors on a $g.P = -P$ et $g.(-P) = P$ donc g est un demi-tour ; en particulier, tout $g \in G$ qui ne stabilise pas P est d'ordre 2. On en déduit que $G \simeq \langle a, b \mid a^n, (ab)^2 \rangle \simeq D_{n/2}$.

4. On considère le cas où il y a $k = 3$ orbites et où $m_2 = 3, m_3 = 3$, alors $n = 12$, $|\mathcal{P}_1| = 6$, $|\mathcal{P}_2| = 4$ et $|\mathcal{P}_3| = 4$. Toute rotation g de G laisse \mathcal{P}_2 stable donc induit une permutation s_g de \mathcal{P}_2 *i.e.* on a un morphisme

$$s : G \rightarrow S_4, g \mapsto s_g.$$

Soit $g \in \ker s$ alors s_g est l'identité *i.e.* g stabilise les quatre points de S ce qui n'est possible que si g est l'identité. Il en résulte que $s(G)$ est un sous-groupe de S_4 isomorphe à G *i.e.* G est isomorphe à un sous-groupe d'ordre 12 de S_4 donc est isomorphe à A_4 .

5. On considère le cas où il y a $k = 3$ orbites et où $m_2 = 3$ et $m_3 = 4$, alors $n = 24$, $|\mathcal{P}_1| = 12$, $|\mathcal{P}_2| = 8$ et $|\mathcal{P}_3| = 6$. Les pôles de $|\mathcal{P}_1|$ et $|\mathcal{P}_3|$ ne sont pas d'ordre 3 et si un pôle P est d'ordre 3 alors il en est de même de $-P$; on peut donc écrire $|\mathcal{P}_2| = \{\pm P_1, \dots, \pm P_4\}$. Toute rotation $g \in G$ non triviale admet soit l'un des couples $\pm P_i$ pour pôles, soit n'admet pas de pôle dans $|\mathcal{P}_2|$ donc G agit par permutation sur les couples $(P_i, -P_i)$ *i.e.* on a un morphisme

$$s : G \rightarrow S_4, g \mapsto s_g.$$

Soit $g \in \ker s$ alors g stabilise chaque couple $\{-P_i, P_i\}$. Si on a $g.P_i = -P_i$ alors g n'a que deux pôles donc il existe $k \neq l$ distincts de i tels que $g.P_k = -P_k$ et $g.P_l = -P_l$. Or (O, P_i, P_k, P_l) forme un repère cartésien : en effet, si h stabilise P_1 alors il s'agit d'une rotation d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ qui permute P_1, \dots, P_4 donc les points P_j pour $j \neq 1$ forment un triangle équilatéral. Ainsi g change l'orientation du repère (O, P_i, P_k, P_l) . Par conséquent g n'inverse pas les points de $|\mathcal{P}_2|$ *i.e.* admet chaque point de $|\mathcal{P}_2|$ pour point fixe et c'est donc l'identité. Ainsi s réalise une injection de G dans S_4 *i.e.* $s(G)$ est un groupe (isomorphe à G donc) d'ordre 24 qui est un sous-groupe de S_4 donc G est isomorphe à S_4 .

6. Dans le dernier cas, la méthode est analogue (et ce cas est admis). □

Leçons concernées

- 01 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrements
- 02 Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications
- 05 Groupes finis. Exemples et applications
- 06 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications
- 07 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications
- 08 Sous-groupes finis de $\mathcal{O}(2, \mathbb{R})$, de $\mathcal{O}(3, \mathbb{R})$. Applications
- 26 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie
- 28 Isométrie d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications.

Référence

F. Combes, *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.