DÉVELOPPEMENT 2

AUTOMORPHISMES DE $K(X)$

Proposition. — *Les automorphismes d'algèbres de $K(X)$ sont les applications*

$$K(X) \to K(X), G(X) \mapsto G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)$$

avec $a, b, c, d \in K$ et $ad - bc \neq 0$.

Démonstration. — Soit Φ un morphisme d'algèbres de $K(X)$, on note $F = \Phi(X)$. Alors $F^n = \Phi(X^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $P = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n$ alors

$$\Phi(P) = \sum_{n=0}^{d} a_n \Phi(X^n) = \sum_{n=0}^{d} a_n F^n = P \circ F.$$

Soit $G \in K(X)$, on écrit $G = \frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in K[X]$, alors

$$\Phi(G) = \Phi\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{\Phi(P)}{\Phi(Q)} = \frac{P \circ F}{Q \circ F} = G \circ F.$$

Réciproquement, il est clair que, pour tout $F \in K(X)$, l'application

$$\Phi_F : K(X) \to K(X), G \mapsto G \circ F$$

est un morphismes d'algèbres; il reste à trouver à quelle condition sur F, l'application Φ_F est un automorphisme.

Si Φ_F est un automorphisme alors Φ_F est surjective donc il existe $G \in K(X)$ tel que $\Phi_F(G) = X$ *i.e.* $G \circ F = X$. On écrit $F = \frac{A}{B}$ avec $A, B \in K[X]$ premiers entre eux et $G = \frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in K[X]$ premiers entre eux, on note

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p \quad \text{et} \quad Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_q X^q$$

où $a_i, b_j \in K$, $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. La relation $G \circ F = X$ devient $P \circ F = X(Q \circ F)$ *i.e.*

$$a_0 + a_1 F + \cdots + a_p F^p = X\left(b_0 + b_1 F + \cdots + b_q F^q\right)$$

d'où

$$a_0 + a_1 \frac{A}{B} + \cdots + a_p \frac{A^p}{B^p} = X\left(b_0 + b_1 \frac{A}{B} + \cdots + b_q \frac{A^q}{B^q}\right).$$

Si on note m le maximum de p et q, on obtient

$$\sum_{j=0}^{p} a_j A^j B^{m-j} = X \sum_{k=0}^{q} b_k A^k B^{m-k}.$$

Dans cette égalité, les seuls polynômes qui ne sont pas divisibles par A sont ceux qui correspondent à $j = 0$ et à $k = 0$, il s'ensuit que A divise la différence $a_0 B^m - b_0 X B^m$ de ces deux termes. Comme A est premier avec B, A est premier avec B^m, donc A divise $a_0 - b_0 X$. Puisque P et Q sont premiers entre eux, on a $(a_0, b_0) \neq (0, 0)$ donc $a_0 - b_0 X$ est non nul, il s'ensuit que $\deg A \leq 1$.

Toujours dans la même égalité, les seuls polynômes qui ne sont pas divisibles par B sont ceux qui correspondent à $j = p$ et à $k = q$. On distingue trois cas :

(i) si $m = p = q$ alors B divise $(a_p - b_p X)A^p$ or A est premier avec B donc B divise $a_p - b_p X$ qui est de degré 1 puisque b_p est le coefficient dominant de B ;

(ii) si $p < q = m$ alors B divise $b_q X$ qui est de degré 1 ;

(iii) si $m = p > q$ alors B divise a_p qui est non nul.

Dans tous les cas, on obtient que $\deg B \leq 1$ *i.e.* on a montré qu'il existe $a, b, c, d \in K$ tels que $F = \dfrac{aX+b}{cX+d}$. De plus, F ne peut pas être constant (sinon Φ_F n'est pas surjectif) donc $ad - bc \neq 0$.

Réciproquement, on considère $a, b, c, d \in K$ tels que $ad - bc \neq 0$ et on note $\Phi_{a,b,c,d}$ le morphisme de $K(X)$ défini par $\Phi_{a,b,c,d}(X) = \dfrac{aX+b}{cX+d}$. Si $(a, b, c, d) \in K^4$ et $(a', b', c', d') \in K^4$ vérifient $ad - bc \neq 0$ et $a'b' - d'c' \neq 0$ alors

$$\Phi_{a,b,c,d} \circ \Phi_{a',b',c',d'} = \Phi_{a'',b'',c'',d''}$$

où (a'', b'', c'', d'') est donné par

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix}.$$

La relation $ad - bc \neq 0$ assure donc que $\Phi_{a,b,c,d}$ est inversible. □

Remarque. — L'application qui à $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(K)$ associe $\Phi_{a,b,c,d}$ est un morphisme de groupes. Son noyau est le sous-groupe des matrices scalaires non nulles.

Leçon concernée

13 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Exemples et applications

Référence

S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 1*, Cassini, 2001.

Sébastien Pellerin