DÉVELOPPEMENT 3

AUTOMORPHISMES DE $\mathcal{SO}(3)$

Considérons l'ensemble X des demi-tours de $\mathbb{R}^3$, il s'agit d'un plan projectif (on identifie $\overline{x}$ avec la rotation r_x d'axe $\mathbb{R}x$).
- Si $\overline{x} \neq \overline{y}$ alors : $\overline{x} \perp \overline{y} \iff r_x r_y = r_y r_x$.
- Si $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ et $\overline{x_3}$ sont trois droites distinctes alors : $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$ sont alignés si et seulement si (x_1, x_2, x_3) sont liés dans $\mathbb{R}^3$ *i.e.* si et seulement s'il existe $\overline{x} \in X$ tel que $r_x r_{x_i} = r_{x_i} r_x$ pour $i = 1, 2, 3$.

Proposition. — *Les automorphismes de $\mathcal{SO}(3)$ sont tous intérieurs.*

Démonstration. — Soit $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{SO}(3))$ alors :
- ψ transforme les éléments d'ordre 2 en éléments d'ordre 2 *i.e.* ψ réalise une bijection de l'ensemble X des demi-tours sur lui-même ;
- ψ transforme trois points alignés de X en trois points alignés ; en effet, si $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$ sont alignés alors il existe x tel que $r_x r_{x_i} = r_{x_i} r_x$ pour $i = 1, 2, 3$, d'où $\psi(r_x)\psi(r_{x_i}) = \psi(r_{x_i})\psi(r_x)$ *i.e.* $\psi(r_{x_1})$, $\psi(r_{x_2})$, $\psi(r_{x_3})$ sont alignés. Ainsi, ψ est une bijection de X qui transforme des points alignés en points alignés *i.e.* ψ est une homographie.

On écrit $\psi = \overline{u}$ avec $u \in GL(\mathbb{R}^3)$ de sorte que $\psi(r_x) = r_{u(x)}$ pour tout $\overline{x}$, on a donc $\psi(r_x) = u r_x u^{-1}$. Si $x \perp y$ alors $r_x r_y = r_y r_x$ donc $\psi(r_x)\psi(r_y) = \psi(r_y)\psi(r_x)$ *i.e.* $r_{u(x)} r_{u(y)} = r_{u(y)} r_{u(x)}$ et il s'ensuit que $u(x) \perp u(y)$. Ainsi, u est un isomorphisme qui conserve l'orthogonalité. Donc u est une similitude d'après le lemme suivant :

Lemme. — *Si $f \in GL(E)$ conserve l'orthogonalité alors u est une similitude.*

On peut donc écrire $u = \lambda v$ avec *a priori* $\lambda > 0$ et $v \in \mathcal{O}(3)$ mais la dimension est impaire donc on peut prendre $\lambda \neq 0$ et $v \in \mathcal{SO}(3)$. Pour tout $\overline{x}$, on a donc

$$\psi(r_x) = \overline{u(x)} = \overline{ux} = \overline{\lambda v}\overline{x} = \overline{vx} = r_{v(x)} = v r_x v^{-1}.$$

Puisque les demi-tours r_x engendrent $\mathcal{SO}(3)$, on a en fait

$$\forall g \in \mathcal{SO}(3)\ ,\ \psi(g) = v g v^{-1}$$

i.e. $\psi \in \mathrm{Int}(\mathcal{SO}(3))$. □

Preuve du lemme. — Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E alors, puisque f est un isomorphisme qui conserve l'orthogonalité, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est aussi une base orthonormale de E. Puisque les e_i sont orthogonaux et normés, on a $\langle e_i - e_j, e_i + e_j \rangle = 0$ d'où (en utilisant encore l'hypothèse sur f) $\langle f(e_i - e_j), f(e_i + e_j) \rangle = 0$ *i.e.* $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Ainsi, il existe $\lambda > 0$ tel que $\|f(e_i)\| = \lambda$ pour tout i. Cela signifie que $\frac{1}{\lambda} f \in \mathcal{O}(E)$ *i.e.* f est une similitude. □

Remarque. — Cela implique que le morphisme injectif

$$\varphi : \mathcal{SO}(3) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{SO}(3)), A \mapsto \varphi_A \quad \text{avec} \quad \varphi_A(M) = AMA^{-1}$$

est en fait un isomorphisme ; on peut donc identifier $\mathrm{Aut}(\mathcal{SO}(3))$ à $\mathcal{SO}(3)$.

Leçon concernée

42 Exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini

Référence

D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.