DÉVELOPPEMENT 4

THÉORÈME DE BURNSIDE

Lemme. — *$u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est nilpotent si et seulement si* $\mathrm{Tr}\ (u^p) = 0$ *pour tout* $1 \leq p \leq n$.

Démonstration. — Si u est nilpotent alors toutes ses valeurs propres sont nulles donc il en est de même de celles des u^p, d'où $\mathrm{Tr}\ (u^p) = 0$ pour tout $1 \leq p \leq n$. Réciproquement, notons

$$\chi_u = (-1)^n X^\alpha (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

où les λ_i sont non nuls et deux à deux distincts. Pour tout $1 \leq p \leq n$, on a

$$\alpha_1 \lambda_1^p + \cdots + \alpha_r \lambda_1^r = \mathrm{Tr}\ (u^p) = 0$$

i.e. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ est un zéro non trivial du système

$$\begin{cases} \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_r X_r = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^r X_1 + \cdots + \lambda_r^r X_r = 0 \end{cases}$$

donc le déterminant de ce système est nul *i.e.* $\lambda_1 \cdots \lambda_r \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = 0$ d'où

$$\lambda_1 \cdots \lambda_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) = 0$$

ce qui est impossible puisque les λ_i sont non nuls et distincts deux à deux. □

Théorème de Burnside. — *Un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini si et seulement s'il est d'exposant fini.*

Démonstration. — Si G est fini alors G est d'exposant fini d'après le théorème de Lagrange.

Réciproquement, supposons qu'il existe un entier $e \geq 1$ tel que $A^e = \mathrm{I}_n$ pour tout $A \in G$ et considérons une famille génératrice $C_1, \ldots, C_r$ de la sous-algèbre $\mathcal{G}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par G, on définit alors une application $\tau : G \to \mathbb{C}^r$ par

$$\tau(A) = (\mathrm{Tr}\ (AC_1), \ldots, \mathrm{Tr}\ (AC_r)).$$

Si A et B vérifient $\tau(A) = \tau(B)$ alors on a $\mathrm{Tr}\ (AM) = \mathrm{Tr}\ (BM)$ pour tout $M \in G$ (puisque les C_i engendrent $\mathcal{G}$ qui contient G).

Notons $N = AB^{-1} - \mathrm{I}_n$ alors N est diagonalisable. En effet, $AB^{-1} \in G$ donc AB^{-1} est annulée par le polynôme $X^e - 1$ qui est scindé à racines simples donc AB^{-1} est diagonalisable *i.e.* il existe P inversible telle que $PAB^{-1}P^{-1} = \Delta$ soit diagonale mais dans ce cas $PAB^{-1}P^{-1} - \mathrm{I}_n = \Delta - \mathrm{I}_n$ est aussi diagonale *i.e.* $P(AB^{-1} - \mathrm{I}_n)P^{-1}$ est diagonale ce qui signifie que N est diagonalisable.

D'autre part, on a

$$\mathrm{Tr}\ ((AB^{-1})^p) = \mathrm{Tr}\ (A(B^{-1}(AB^{-1})^{p-1})) = \mathrm{Tr}\ (B(B^{-1}(AB^{-1})^{p-1})) = \mathrm{Tr}\ ((AB^{-1})^{p-1})$$

d'où (de proche en proche) pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Tr}\ ((AB^{-1})^p) = \mathrm{Tr}\ (\mathrm{I}_n) = n.$$

Comme les matrices AB^{-1} et I_n commutent, on a

$$N^k = (AB^{-1} - \mathrm{I}_n)^k = \sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p (-1)^{k-p} (AB^{-1})^p$$

d'où

$$\mathrm{Tr}\ (N^k) = \sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p (-1)^{k-p} \mathrm{Tr}\ ((AB^{-1})^p) = \sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p (-1)^{k-p} n = n \sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p (-1)^{k-p}$$

i.e. on a $\mathrm{Tr}\ (N^k) = n(1-1)^k = 0$, pour tout k, et il découle donc du lemme que N est nilpotente. Puisque N est diagonalisable et nilpotente, on a $N = 0$ *i.e.* $AB^{-1} = \mathrm{I}_n$ d'où $A = B$. On a donc montré l'injectivité de l'application τ.

Les éléments de G sont tous annulés par le polynôme $X^e - 1$ qui est scindé à racines simples donc tous les éléments de G sont diagonalisables à valeurs propres dans l'ensemble des racines $e^{\text{è}}$ de l'unité ; il s'ensuit que les traces des éléments de G ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs donc $\tau(G)$ est fini. Mais τ est injective donc G est aussi fini. □

Leçons concernées

05 Groupes finis. Exemples et applications
07 Groupes linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications
39 Endomorphismes nilpotents
40 Polynômes d'endomorphismes. Applications

Références

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.
X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.