DÉVELOPPEMENT 1

ACTION DE $\mathcal{A}_n$ SUR $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$

On considère un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 et l'action de $\mathcal{S}_n$ sur l'anneau $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ définie par

$$\sigma \cdot f(T_1, \ldots, T_n) = f(T_{\sigma(1)}, \ldots, T_{\sigma(n)}).$$

Définition. — Soit $f \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$.

(*i*) On dit que f est *symétrique* si $\sigma \cdot f = f$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

(*ii*) On dit que f est *alterné* si $\sigma \cdot f = \varepsilon(\sigma) f$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

(*iii*) On dit que f est *semi-symétrique* si $\sigma \cdot f = f$ pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_n$.

Exemple. — Le *polynôme de Vandermonde* défini par

$$V(T_1, \ldots, T_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_1^{n-1} & T_2^{n-1} & \cdots & T_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

est alterné (donc semi-symétrique non symétrique).

En effet, considérons le polynôme

$$f(X) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ T_1 & \cdots & T_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ T_1^{n-1} & \cdots & T_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix} \in (\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}])[X],$$

il s'agit d'un polynôme (en X) de degré au plus $n-1$ qui s'annule en $T_1, \ldots, T_{n-1}$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_{n-1}]$ tel que $f = \alpha(X - T_{n-1}) \cdots (X - T_1)$ et en identifiant les termes constants, il vient

$$\alpha(-1)^{n-1} T_1 \cdots T_{n-1} = f(0) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ T_1 & \cdots & T_{n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ T_1^{n-1} & \cdots & T_{n-1}^{n-1} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} T_1 & \cdots & T_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ T_1^{n-1} & \cdots & T_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

d'où

$$\alpha T_1 \cdots T_{n-1} = T_1 \cdots T_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ T_1^{n-2} & \cdots & T_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = T_1 \cdots T_{n-1} V(T_1, \cdots, T_{n-1})$$

et il vient donc

$$V(T_1, \ldots, T_n) = f(T_n) = (T_n - T_{n-1}) \cdots (T_n - T_1) V(T_1, \cdots, T_{n-1}).$$

En raisonnant par récurrence, on obtient finalement

$$V(T_1, \ldots, T_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (T_j - T_i).$$

Il est alors clair que ce polynôme est alterné puisque c'est un déterminant.

Proposition. — *Soit $f(T_1,\dots,T_n)$ un polynôme semi-symétrique alors f se décompose de façon unique sous la forme*

$$f(T_1,\dots,T_n) = P(T_1,\dots,T_n) + V(T_1,\dots,T_n)Q(T_1,\dots,T_n)$$

où P et Q sont deux polynômes symétriques.

Démonstration. — Soit σ_1 et σ_2 deux permutations impaires alors $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ est une permutation paire or f est semi-symétrique donc $\sigma_2^{-1}\sigma_1 \cdot f = f$ *i.e.* $\sigma_1 \cdot f = \sigma_2 \cdot f$. Puisque les permutations impaires agissent de la même façon sur f, il est donc cohérent de poser $g = \tau \cdot f$ avec τ transposition, alors $g = \sigma \cdot f$ pour toute permutation impaire σ.

Soit τ_1 et τ_2 deux transpositions alors, puisque f est semi-symétrique et par définition de g, on a :
– $\tau_1 \cdot g = \tau_1 \cdot (\tau \cdot f) = (\tau_1\tau) \cdot f = f$ et $\tau_1 \cdot f = g$
– $(\tau_2\tau_1) \cdot g = (\tau_2\tau_1) \cdot (\tau \cdot f) = (\tau_2\tau_1\tau) \cdot f = g$ et $(\tau_2\tau_1) \cdot f = f$
d'où
– $\tau_1 \cdot (f-g) = g - f = \varepsilon(\tau_1)(f-g)$ et $(\tau_2\tau_1) \cdot (f-g) = f - g = \varepsilon(\tau_2\tau_1)(f-g)$
– $\tau_1 \cdot (f+g) = g + f = f + g$ et $(\tau_2\tau_1) \cdot (f+g) = f + g$
ce qui signifie que $f-g$ est alterné et $f+g$ est symétrique.

On considère deux entiers $h < k$ de $\{1,\dots,n\}$ et on effectue la division euclidienne, dans l'anneau $(\mathbb{K}[T_1,\dots,\widehat{T_k},\dots,T_n])[T_k]$ de $f-g$ par $T_k - T_h$

$$f - g = (T_k - T_h)q + r \quad \text{avec } q, r \in \mathbb{K}[T_1,\dots,\widehat{T_k},\dots,T_n] \quad \text{et} \quad \deg_{T_k} r < 1$$

i.e. r ne dépend pas de l'indéterminée T_k. On note $\tau_{h,k}$ la transposition inversant h et k alors

$$-(f-g) = \tau_{h,k} \cdot (f-g) = \tau_{h,k} \cdot (T_k - T_h)\tau_{h,k} \cdot q + \tau_{h,k} \cdot r = -(T_k - T_h)\tau_{h,k} \cdot q + \tau_{h,k} \cdot r.$$

On évalue maintenant ces deux expressions en substituant à l'indéterminée T_k l'élément T_h de l'anneau des coefficients, il vient

$$(f-g)(T_h) = r(T_h) \quad \text{et} \quad -(f-g)(T_h) = (\tau_{h,k} \cdot r)(T_h).$$

Mais r est une constants de l'anneau $(\mathbb{K}[T_1,\dots,\widehat{T_k},\dots,T_n])[T_k]$ donc $r(T_h) = r$. D'autre part, $\tau_{h,k} \cdot r$ ne dépend pas de T_h, il est donc clair que $(\tau_{h,k} \cdot r)(T_h) = r$. On a donc

$$(f-g)(T_h) = r \quad \text{et} \quad -(f-g)(T_h) = r$$

ce qui n'est possible que si $r = 0$. Par conséquent $T_k - T_h$ divise $f - g$ pour tous $h < k$, on pose

$$(f-g)(T_1,\dots,T_n) = 2V(T_1,\dots,T_n)Q(T_1,\dots,T_n).$$

En pose en outre

$$(f+g)(T_1,\dots,T_n) = 2P(T_1,\dots,T_n).$$

On a déja dit que P était un polynôme symétrique. Considérons une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ alors

$$\varepsilon(\sigma)(f-g) = \sigma \cdot (f-g) = 2\sigma \cdot V(T_1,\dots,T_n)\sigma \cdot Q(T_1,\dots,T_n) = 2\varepsilon(\sigma)V(T_1,\dots,T_n)\left[\sigma \cdot Q(T_1,\dots,T_n)\right]$$

d'où

$$2V(T_1,\dots,T_n)Q(T_1,\dots,T_n) = f - g = 2V(T_1,\dots,T_n)\left[\sigma \cdot Q(T_1,\dots,T_n)\right]$$

i.e. (puisque $\mathbb{K}[T_1,\dots,T_n]$ est intègre)

$$Q(T_1,\dots,T_n) = \sigma \cdot Q(T_1,\dots,T_n)$$

ce qui signifie que Q est symétrique.

Les relations $f + g = 2P$ et $f - g = 2VQ$ donnent bien $f = P + VQ$ avec P et Q symétriques. Pour l'unicité, on écrit $f = \widetilde{P} + V\widetilde{Q}$ avec $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ symétriques alors $g = \tau \cdot f = \widetilde{P} - V\widetilde{Q}$ d'où $f + g = 2\widetilde{P}$ et $f - g = 2V\widetilde{Q}$. Les polynômes $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ sont donc complètement déterminés par f et g *i.e.* par f. □

Leçons concernées

02 Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications

06 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications

16 Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geq 2$). Polynômes symétriques. Exemples et applications

Référence

R. Goblot, *Algèbre commutative*, Masson, 1996.