8 Enveloppe convexe du groupe orthogonal

Soit $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme d'opérateur notée $\|.\|$ associée à la norme $\|.\|_2$ de $\mathbb{R}^n$.

Théorème. *L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B}$.*

Preuve.
Il est clair que $\mathcal{B}$ est convexe et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$, si bien que $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}$.

On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe $A \in \mathcal{B}$, $A \notin \mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

Rappelons que $(X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(^tXY)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, cette application est bilinéaire symétrique, de plus si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ^tXX est une matrice symétrique positive. Ainsi, $\mathrm{tr}(^tXX) \geqslant 0$ et $\mathrm{tr}(^tXX) = 0 \Rightarrow {}^tXX = 0$, de sorte que $\|Xu\|^2 = 0\ \forall u \in \mathbb{R}^n$, finalement $X = 0$.

Soit P le projeté orthogonal de A sur le convexe compact $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ relativement à ce produit scalaire. On sait que P est caractérisé par $\mathrm{tr}(^t(A-P)(M-P)) \leqslant 0$ $\forall M \in \mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$, soit encore $\mathrm{tr}(BM) \leqslant \mathrm{tr}(BP)$ où on a noté $B = {}^tA - P$. On a aussi $\mathrm{tr}(BP) < \mathrm{tr}(BA)$, puisque $\mathrm{tr}(B(A-P)) = \mathrm{tr}(^t(A-P)(A-P)) > 0$. Finalement, on peut écrire que $\mathrm{tr}(BM) < \mathrm{tr}(BA)\ \forall M \in \mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

Signalons que dans le paragraphe précédent, on a supposé connu le fait que l'enveloppe convexe d'un compact soit compacte, ce qui se déduit par exemple du théorème de Carathéodory ; ainsi que le théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert. On aurait pu aussi passer par le théorème de Hahn-Banach géométrique, mais ce n'est pas nécessaire ici.

Écrivons maintenant $B = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (décomposition polaire de B). D'après ce qui précède, on doit avoir $\mathrm{tr}(B\Omega^{-1}) < \mathrm{tr}(BA)$, soit $\mathrm{tr}S < \mathrm{tr}(\Omega SA)$. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de S. On a $\mathrm{tr}(\Omega SA) = \sum \langle \Omega SAe_i, e_i\rangle$, soit $\mathrm{tr}(\Omega SA) = \sum \langle Ae_i, S\Omega^{-1}e_i\rangle$. On en déduit que $\mathrm{tr}(\Omega SA) \leqslant \sum \|Ae_i\|\|S\Omega^{-1}e_i\|$, avec $\|Ae_i\| \leqslant 1$ (car $A \in \mathcal{B}$) et $\|S\Omega^{-1}e_i\| = \|Se_i\| = \lambda_i$, i-ème valeur propre de S. Ainsi, $\mathrm{tr}(\Omega SA) \leqslant \sum \lambda_i = \mathrm{tr}S$, contrairement à ce qui est écrit quelques lignes plus haut.

Pour conclure, on doit avoir $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}$, finalement $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{B}$.

□

Proposition. *$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est exactement l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$.*

Preuve.
Soit $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, supposons que $O = \frac{1}{2}(U + V)$ avec U, $V \in \mathcal{B}$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$, on a $\|Ox\|^2 = \|x\|^2$ d'une part et $\|\frac{1}{2}(Ux + Vx)\|^2 \leqslant 1$ d'autre part, en utilisant l'inégalité de

CAUCHY-SCHWARZ et sachant que $\|Ux\|, \|Vx\| \leqslant 1$. Comme on est dans le cas d'égalité, on doit avoir $\|Ux\| = \|Vx\| = 1$ et Ux, Vx sont positivement liés. On en déduit que $Ux = Vx = Ox$, finalement $U = V = O$. Ceci montre que O est un point extrémal de $\mathcal{B}$.

Soit maintenant $M \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on écrit $M = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On peut encore écrire $S = PDP^{-1}$, où D est diagonale et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Dire que $M = XDY \in \mathcal{B}$ avec X, $Y \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale revient à dire que les coefficients d_i de D sont dans $[-1, 1]$ (même si en l'occurrence ils sont $\geqslant 0$). Dire que $M \notin \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ revient à dire que l'un au moins des d_i est < 1. Pour $\alpha > 0$ assez petit, on a $[d_i - \alpha, d_i + \alpha] \subset [-1, 1]$. Si M_α désigne la matrice obtenue en remplaçant d_i par $d_i + \alpha$ dans D, alors M est le milieu du segment $[M_{-\alpha}, M_\alpha] \subset \mathcal{B}$, ce qui prouve que M n'est pas un point extrémal de $\mathcal{B}$. □

On remarquera que la première proposition se déduit immédiatement de la seconde si on connaît le théorème de KREIN-MILMAN : un convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Leçons possibles
106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
132 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
((**133** Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.))
137 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.
(**148** Groupe orthogonal d'une forme quadratique.)

Références