# DÉVELOPPEMENT 13

# ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES ET SÉRIES GÉNÉRATRICES

**Exemple**. — Le nombre de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation $x + 2y + 3z = n$ est
$$p(n) = \frac{(n+1)(n+5)}{12} + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2}{9}\cos\frac{2i\pi}{3}.$$

*Démonstration.* — Pour $|t| < 1$, on effectue les développements en série entière suivants :
$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\ ,\ \frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \ \text{ et }\ \frac{1}{1-t^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{3k}$$
de sorte que
$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^{3k}\right) = \sum_{d\geq 0}\left(\sum_{\substack{n+2m+3p=d \\ n,m,p\geq 0}} t^d\right) = \sum_{d\geq 0} p(d)t^d.$$
On décompose cette fraction en éléments simples
$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \frac{1}{6(1-t)^3} + \frac{1}{4(1-t)^2} + \frac{17}{72(1-t)} + \frac{1}{8(1+t)} + \frac{1}{9(1-jt)} + \frac{1}{9(1-j^2t)}.$$
En dérivant la série géométrique, il vient
$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)t^k \ \text{ et }\ \frac{1}{(1-t)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2}(k+2)(k+1)t^k$$
d'où en remplaçant plus haut
$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{12}(k+2)(k+1) + \frac{1}{4}(k+1) + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^k}{8} + \frac{1}{9}(e^{\frac{2i\pi k}{3}} + e^{-\frac{2i\pi k}{3}})\right)t^k.$$
et on a donc, pour tout $k \geq 0$, $p(k) = \dfrac{(k+1)(k+5)}{12} + \dfrac{17}{72} + \dfrac{(-1)^k}{8} + \dfrac{2}{9}\cos\dfrac{2i\pi}{3}.$ □

On considère des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ premiers dans leur ensemble et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n$ le nombre de solutions $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation
$$\alpha_1 n_1 + \cdots + \alpha_p n_p = n.$$

**Proposition**. — $S_n \sim \dfrac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_p}\dfrac{n^{p-1}}{(p-1)!}$

*Démonstration.* — On a

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}S_nz^n=\prod_{\ell=1}^{p}\sum_{n_\ell\in\mathbb{N}}z^{\alpha_\ell n_\ell}=\prod_{\ell=1}^{p}\frac{1}{1-z^{\alpha_\ell}}$$

et toutes ces séries entières admettent 1 pour rayon de convergence. La fraction rationnelle $F(z)$ a pour pôles les racines $\alpha_\ell^{\text{è}}$ de l'unité pour $\ell=1,\dots,p$. En outre, le pôle $z=1$ est d'ordre $p$ alors que tous les autres sont d'ordre $<p$ (puisque les $\alpha_i$ sont premiers dans leur ensemble). La décomposition en éléments simples de $F$ s'écrit donc sous la forme

$$F(z)=\frac{A}{(1-z)^p}+G(z)$$

où $G(z)$ est une somme finie de termes du type $\dfrac{a_{1,\omega}}{\omega-z}+\cdots\dfrac{a_{p-1,\omega}}{(\omega-z)^{p-1}}$ avec les $\omega$ racines de l'unité et les $a_{k,\omega}\in\mathbb{C}$. Pour trouver $A$, on écrit

$$(1-z)^pF(z)=\frac{1}{1+z+\cdots+z^{\alpha_1-1}}\cdots\frac{1}{1+z+\cdots+z^{\alpha_p-1}}$$

puis on fait tendre $z$ vers 1 d'où $A=\dfrac{1}{\alpha_1\cdots\alpha_p}$. Par ailleurs en dérivant $k$ fois, il vient

$$\frac{1}{(\omega-z)^k}=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(s+k-1)!}{s!}\omega^{-s-k}z^s$$

et (puisque $|\omega|=1$) le coefficient en $z^n$ dans cette série est un $O(s^{k-1})$. D'autre part, on a

$$\frac{1}{(1-z)^p}=\frac{1}{(p-1)!}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{(s+k-1)!}{s!}z^s=\frac{1}{(p-1)!}\sum_{s=0}^{+\infty}(s+1)\cdots(s+p-1)z^s$$

d'où

$$S_n=\frac{1}{\alpha_1\cdots\alpha_p}\frac{(n+1)\cdots(n+p-1)}{(p-1)!}+O(n^{p-2})$$

d'où

$$S_n\sim\frac{1}{\alpha_1\cdots\alpha_p}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!}.$$

□

### Leçons concernées

13 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Exemples et applications

18 Équations diophantiennes du premier degré $ax+by=c$. Exemples d'équations diophantiennes de degré suprieur

### Références

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Analyse 1*, Masson, 1997.

X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.