24 Pavage du plan

Un appelle groupe de pavage du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ un groupe G de déplacements associé à un compact d'intérieur non vide P tel que :
(i) $G.P = \mathbb{R}^2$,
(ii) $\forall g, g' \in G$, $g.\mathring{P} \cap g'.\mathring{P} \neq \emptyset \Rightarrow g.P = g'.P$.

On appellera pavés tous les $Q = g.P$, où $g \in G$. La définition d'un groupe de pavage revient donc à dire que les pavés recouvrent le plan et sont d'intérieurs disjoints.

Notons τ_b la translation de vecteur $b \in \mathbb{C}$ et $r_{A;\theta}$ la rotation de centre A et d'angle θ.

Théorème. *Il n'existe que cinq groupes de pavages du plan à conjugaison par une application affine près :*
- $\langle \tau_1, \tau_i \rangle$
- $\langle \tau_1, \tau_i, r_{O;\pi} \rangle$
- $\langle \tau_1, \tau_j, r_{O;2\pi/3} \rangle$
- $\langle \tau_1, \tau_i, r_{O;\pi/2} \rangle$
- $\langle \tau_1, \tau_{-j^2}, r_{O;\pi/3} \rangle$

En particulier, on voit que tout pavage du plan a un domaine fondamental P qui est en réalité convexe compact d'intérieur non vide.

Preuve.
Soit T l'ensemble des translations de G. T est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$. En effet, supposons qu'il existe des translations de vecteurs arbitrairement proches de 0 dans G. Soit $M \in \mathring{P}$, il existe alors une translation non nulle τ de G telle que $\tau(M) \in \mathring{P}$. D'après le premier point dans la définition d'un pavage, on a alors $\tau.P = P$, autrement dit P est stable par τ. Ceci est impossible car P est compact.

T est donc un sous-réseau dans $\mathbb{R}^2$: $T = \{0\}$ ou bien $T = \mathbb{Z}\vec{u}$ avec $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ou bien $T = \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$ avec $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires.

ON PEUT DIRE DÈS A PRÉSENT QUE LES ROTATIONS DE G STABILISENT T.

Si $T = \{0\}$, alors G est commutatif. En effet, si r, $s \in G$, alors $rsr^{-1}s^{-1}$ est une translation (sa partie linéaire est l'identité), donc $rsr^{-1}s^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Les éléments de G sont donc des rotations de même centre Ω. Si $R > 0$ est assez grand pour que $P \subset D(\Omega, R)$, on a alors $G.P \subset D(\Omega, R)$, ce qui contredit la définition d'un pavage. Ce cas est donc exclu.

Supposons maintenant que $T = \mathbb{Z}\vec{u}$ avec $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Si r est une rotation non triviale de G, alors $r\tau_{\vec{u}}r^{-1} = \tau_{\vec{r}(\vec{u})}$. On en déduit que $\vec{r}(\vec{u}) = -\vec{u}$. Les rotations non triviales de G sont donc toutes d'angle π. Maintenant si r, s sont des rotations non triviales de G, alors rs est une translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega_s\Omega_r}$. On en déduit que tous les centres des rotations non triviales de G sont sur une droite Δ de direction $\mathbb{R}\vec{u}$. Par suite, si $R > 0$ est suffisamment grand pour que la bande $B = \{z \in \mathbb{C}, d(z, \Delta) < R\}$ contienne P, alors $G.P \subset B$, ce qui contredit encore la définition d'un pavage.

Finalement, $T = \mathbb{Z}\vec{u} \oplus \mathbb{Z}\vec{v}$ avec $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires. Les éléments de $\vec{G}$ stabilisent ce réseau. En effet, si r est une rotation non triviale de G alors $r\tau_{\vec{b}}r^{-1} = \tau_{\vec{r}(\vec{b})}$, si bien que $\vec{r}(\vec{b}) \in T$. Dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$, la matrice d'un élément r_θ de $\vec{G}$ est donc dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. En particulier sa trace $2\cos\theta$ est un entier. On en déduit que $\theta \in \{0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$.

En particulier $\vec{G}$ est fini donc cyclique. Soit $r \in G$ tel que $\vec{G} = \langle \vec{r} \rangle$. On a une suite exacte scindée $1 \to T \to G \to \vec{G} = \langle \vec{r} \rangle \to 1$. On peut donc écrire $G = T \ltimes \langle r \rangle$, en particulier G est engendré par $\tau_{\vec{u}}$, $\tau_{\vec{v}}$ et r.

Si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, alors quitte à conjuguer par une transformation affine on peut supposer que O est le centre de r, $\vec{u} = 1$ $(\in \mathbb{C})$ et $\vec{v} = i$ (un tel changement de base envoie bien r sur $r_{O;\theta}$). Ceci donne les deux premiers cas du théorème.

Dans les autres cas, on écrit que l'on peut supposer $\vec{u} = 1$ et O centre de r quitte à conjuguer par une similitude. Si on pose $\vec{v}' = r(\vec{u})$, alors $(\vec{u}, \vec{v}')$ est une $\mathbb{Z}$-base de T (et alors $G = \langle \tau_{\vec{u}}, \tau_{\vec{v}'}, r \rangle$: on obtient bien les trois autres cas). En effet, sinon il existerait $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\vec{v}'/n \in T$ (par exemple grâce au théorème de la base adaptée), mais dans ce cas on devrait avoir $r^{-1}(\vec{v}'/n) = \vec{u}/n \in T$, ce qui n'est pas le cas.

Dessiner les pavages ne serait pas une mauvaise idée. $\square$

Leçons possibles

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
102 Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$. Réseaux. Exemples.
(**103** Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.)
107 Sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$, de $O(3, \mathbb{R})$. Applications.
108 Exemples de parties génératrices d'un groupe.
((**133** Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.))
135 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications.
(**139** Applications des nombres complexes à la géométrie.)
140 Angles : Définitions et utilisation en géométrie.
141 Utilisation des groupes en géométrie.
147 Applications affines.

(**144** Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.)

Références
goblot géométrie