26 Décomposition polaire

Théorème. *La multiplication $U(n) \times \mathcal{H}^{++} \to GL_n(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.*

Preuve.
Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrons qu'il existe un unique couple $(U, H) \in \mathrm{U}(n) \times \mathcal{H}^{++}$ tel que $M = UH$ (décomposition polaire).

Supposons que M se décompose de la sorte, alors on a $M^*M = H^2$. Comme $M^*M \in \mathcal{H}^{++}$, elle a une et une seule racine carrée dans $\mathcal{H}^{++}$, c'est ce qu'on montre ci-après. Une fois montrée l'unicité de H, celle de U s'en ensuit immédiatement (car $U = MH^{-1}$).

Montrons le point précédent : soient h' et h deux endomorphismes hermitiens définis positifs tels que $h^2 = h'$. $\mathbb{C}^n$ est somme directe des sous-espaces propres de h'. Soit E_λ un tel sous-espace, alors E_λ est stable par h (car h et h' commutent). h_F est encore hermitien défini positif donc diagonalisable, et toute valeur propre de h_F est une racine carrée d'une valeur propre de h'_F. Nécessairement, h_F n'a donc qu'une valeur propre, à savoir $\sqrt{\lambda}$: c'est une homothétie. h est donc uniquement déterminé sur les sous-espaces propres de h', donc sur $\mathbb{C}^n$. Réciproquement, on vérifie immédiatement que définir h de la sorte sur les sous-espaces propres de h' fournit bien une racine carrée hermitienne définie positive de h'.

Maintenant, si on prend pour H l'unique racine carrée dans $\mathcal{H}^{++}$ de M^*M et $U = MH^{-1}$, alors on a bien $M = UH$ et $U \in \mathrm{U}(n)$ car $U^*U = H^{-1}M^*MH^{-1} = I_n$ vu que $M^*M = H^2$.

Il est clair que l'application $(U, H) \mapsto UH$ est continue. Réciproquement, supposons que $M_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} M$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $M = U_k H_k$ (resp. $M = UH$) la décomposition polaire de M_k (resp. de M). Par compacité de $\mathrm{U}(n)$, on peut extraire une sous-suite convergente $\mathrm{U}_{\varphi(k)} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} U'$ dans $\mathrm{U}(n)$. La suite de terme $H_{\varphi(k)} = {U_{\varphi(k)}}^* M_{\varphi(k)}$ converge alors vers $H' = U'^* M$. On voit que $H' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, de plus $H' \in \mathcal{H}^+$ (car $\mathcal{H}^+$ est fermé), finalement $H' \in \mathcal{H}^{++}$. Par unicité de la décomposition polaire, on a nécessairement $U' = U$ et $H' = H$. La suite (U_k) du compact $\mathrm{U}(n)$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence, elle est donc convergente. On a ainsi $\mathrm{U}_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} U$ et $H_k = {U_k}^* M_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} U^*M = H$. Ceci prouve que m est bicontinue.

□

Donnons maintenant une application :

Proposition. *$U(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{C})$.*

Preuve.
Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contenant $\mathrm{U}(n)$. Soit $M \in G$ et $M = UH$ la décomposition polaire de M. Puisque $U \in G$, on a $H \in G$. La suite $(H^k)_{k\in\mathbb{N}}$ a donc une sous-suite convergente dans G (par compacité). Cela n'est possible que si toutes les valeurs propres de H (qui sont des réels > 0) sont $\leqslant 1$. Mais si l'une des valeurs propres de H est < 1, alors la limite d'une suite extraite de (H^k) est non inversible. Finalement, toutes les valeurs propres de H sont 1, donc $H = I_n$. Ainsi $M = U \in \mathrm{U}(n)$, ce qui montre que $G \subset \mathrm{U}(n)$.

□

Leçons possibles
106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.
133 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
134 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.
130 Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications.
(**203** Utilisation de la notion de compacité.)

Références
[Ser01]