

DÉVELOPPEMENT 24

THÉORÈME DE STABILITÉ DE LIAPOUNOV

Théorème de Liapounov. — Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 avec $f(0) = 0$ et telle que $\operatorname{Re} \lambda < 0$ pour toute valeur propre λ de df_0 . Alors pour x_0 voisin de 0, la solution $x(t)$ de $X' = f(X)$, $X(0) = x_0$ tend exponentiellement vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Démonstration. — • Soit A la matrice de df_0 dans la base canonique de \mathbb{R}^n et $\varepsilon > 0$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A_1 = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & t_{i,j} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{où } |t_{i,j}| \leq \varepsilon,$$

on note B la matrice diagonale et C la matrice nilpotente. On note $x(t)$ une solution de $X' = f(X)$ et $z(t)$ une solution de $X' = AX$; on sait que $z(t) = e^{tA}z(0)$ mais on souhaite retrouver le comportement asymptotique de cette solution. En posant $z_1(t) = Pz(t)$, on obtient une solution de $X' = A_1X$. On peut alors écrire

$$\frac{d}{dt} \|z_1(t)\|^2 = 2\operatorname{Re} \langle z_1'(t), z_1(t) \rangle = 2\operatorname{Re} \langle A_1 z_1(t), z_1(t) \rangle = 2\operatorname{Re} \langle B z_1(t), z_1(t) \rangle + 2\operatorname{Re} \langle C z_1(t), z_1(t) \rangle.$$

Soit $\Lambda > 0$ tel que $-\Lambda = \sup \operatorname{Re} \lambda_i$, alors

$$\operatorname{Re} \langle B z_1, z_1 \rangle = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta_{1,i} \overline{\zeta_{1,i}} = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \lambda_i |\zeta_{1,i}|^2 \leq -\Lambda \|z_1\|^2$$

et il existe une constante $d > 0$ telle que

$$|\langle C z_1, z_1 \rangle| \leq \|C\| \|z_1\|^2 \leq d\varepsilon \|z_1\|^2.$$

On obtient donc (quitte à choisir ε petit)

$$\frac{d}{dt} \|z_1(t)\|^2 \leq (-2\Lambda + 2d\varepsilon) \|z_1(t)\|^2 \leq -a \|z_1(t)\|^2$$

avec $a > 0$. Il en résulte que pour tout t on a

$$\|z_1(t)\|^2 \leq e^{-at} \|z_1(0)\|^2$$

puis qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|z(t)\|^2 \leq ce^{-at} \|z(0)\|^2.$$

• Ce qui précède permet de définir un produit scalaire sur \mathbb{R}^n par

$$b(V, W) = \int_0^{+\infty} \langle e^{sA}V, e^{sA}W \rangle ds$$

dont on note respectivement q et N la forme quadratique et la norme associées; en écrivant

$$q(V + tW) = q(V) + t^2q(W) + 2tb(V, W)$$

puis en dérivant pour $t = 0$, on obtient

$$dq_V(W) = \left. \frac{d}{dt} q(V + tW) \right]_{t=0} = 2b(V, W).$$

• On pose $f(u) = Au + r(u)$ alors

$$(q(x(t)))' = dq_{x(t)}(x'(t)) = 2b(x(t), x'(t)) = 2b(x(t), Ax(t)) + 2b(x(t), r(x(t)))$$

or pour tout $V \in \mathbb{R}^n$ on a

$$2b(V, AV) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{sA}V, e^{sA}AV \rangle ds = \left[\|e^{sA}V\|^2 \right]_{s=0}^{s \rightarrow +\infty} = -\|V\|^2$$

d'où

$$(q(x(t)))' = -\|x(t)\|^2 + 2b(x(t), r(x(t))).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|b(x(t), r(x(t)))| \leq N(x(t))N(r(x(t)))$$

mais $r(u) = f(u) - f(0) - df_0(u)$ donc par définition de la différentiabilité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$N(u) \leq \alpha \Rightarrow N(r(u)) \leq \varepsilon N(u)$$

et il en résulte que pour $N(x(t)) \leq \alpha$ on a

$$(q(x(t)))' = -\|x(t)\|^2 + 2\varepsilon N(x(t))^2 \leq -\|x(t)\|^2 + 2\varepsilon q(x(t)).$$

L'équivalence des normes N et $\| \cdot \|$ montre que, quitte à choisir ε petit, on a

$$(q(x(t)))' \leq -\beta q(x(t)) \quad \text{avec } \beta > 0.$$

• Tout d'abord on en déduit si $N(x_0) \leq \alpha$ alors $N(x(t)) \leq \alpha$ pour $t \geq 0$; en effet, sinon il existe un plus petit instant t_1 tel que $N(x(t_1)) = \alpha$ or $N(x(t))$ décroît au voisinage de t_1 et la valeur α est donc censée être atteinte avant t_1 ! D'autre part, $N(x(t))$ décroît sur le domaine de définition de $x(t)$ donc $x(t)$ n'explose pas en temps fini *i.e.* la solution $x(t)$ est définie sur $[0, +\infty[$. Enfin, on a

$$\left(e^{\beta t} q(x(t)) \right)' = e^{\beta t} \left((q(x(t)))' + \beta q(x(t)) \right) \leq 0$$

donc pour tout $t \geq 0$, on a

$$q(x(t)) \leq e^{-\beta t} q(x_0)$$

i.e. $x(t)$ tend exponentiellement vers 0. □

Leçons concernées

23 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications

38 Exponentielle de matrices. Applications

Références

J. Hubbard et B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, 1999.

F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.