DÉVELOPPEMENT 28

THÉORÈME DE SCHUR

Lemme. — *Soit K une extension de $\mathbb{Q}$ de degré δ et $P \in K[T_1, \ldots, T_m]$. Il existe $\overline{P} \in \mathbb{Q}[T_1, \ldots, T_m]$ tel que* $\deg \overline{P} = \delta \deg P$ *et :* $\forall (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m,\ P(z_1, \ldots, z_m) = 0 \Rightarrow \overline{P}(z_1, \ldots, z_m) = 0$.

Démonstration. — Le théorème de l'élément primitif donne $K = \mathbb{Q}(\theta)$, on note P_θ le polynôme minimal de θ. Les conjugués $\theta_2, \ldots, \theta_\delta$ de θ sont les autres racines complexes de P_θ et sont simples puisque P_θ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On note σ_k le morphisme canonique $\mathbb{Q}(\theta) \to \mathbb{Q}(\theta_k)$ et $\sigma_1 = \mathrm{id}_K$. On écrit $P = \sum_\ell c_\ell(\theta) T^\ell$ avec $c_\ell \in \mathbb{Q}[X]$ et $\deg c_\ell < \delta$ (d'où l'unicité de c_ℓ). On pose

$$P^{\sigma_k} = \sum_\ell c_\ell(\theta_k) T^\ell \in \mathbb{Q}(\theta_k)[T_1, \ldots, T_m] \quad \text{et} \quad \overline{P} = P P^{\sigma_2} \cdots P^{\sigma_\delta}.$$

Le coefficient en X^ℓ de $\overline{P}$ est $\overline{c_\ell}(\theta_1, \ldots, \theta_\delta) = \sum_{\ell_1 + \cdots + \ell_\delta = \ell} c_{\ell_1}(\theta_1) \cdots c_{\ell_\delta}(\theta_\delta)$ *i.e.* est une expression polynômiale à coefficients rationnels en les polynômes symétriques élémentaires $\Sigma_k(\theta_1, \ldots, \theta_\delta)$ or ces derniers sont les coefficients (au signe près) de P_θ donc $\overline{P} \in \mathbb{Q}[T_1, \ldots, T_m]$. De plus, on a clairement $\deg \overline{P} = \delta \deg P$ et le fait que $P = P^{\sigma_1}$ divise $\overline{P}$ assure la dernière condition. $\square$

Lemme. — *Soit E une extension de degré d de $T = \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_t)$ où les a_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors $E \cap \overline{\mathbb{Q}}$ est une extension de $\mathbb{Q}$ de degré au plus d.*

Démonstration. — Notons $F = E \cap \overline{\mathbb{Q}}$ et considérons $(z_1, \ldots, z_{d+1}) \in F^{d+1}$. Comme E est de degré d sur T, $(z_1, \ldots, z_{d+1})$ est liée sur T *i.e.* il existe $P_1, \ldots, P_{d+1} \in \mathbb{Q}[T_1, \ldots, T_t]$ tels que

$$P_1(a_1, \ldots, a_t) z_1 + \cdots + P_{d+1}(a_1, \ldots, a_t) z_{d+1} = 0,$$

on pose alors $P = \sum_{k=1}^{d+1} P_k(T_1, \ldots, T_t) z_k$. D'après le premier lemme, il existe $\overline{P} \in \mathbb{Q}[T_1, \ldots, T_t]$ tel que $\overline{P}(a_1, \ldots, a_t) = 0$ *i.e.* $\overline{P} = 0$ par hypothèse sur les a_i. Avec les notations du lemme précédent, on a $P^{\sigma_{k_0}} = 0$ pour un certain k_0 donc $c_\ell(\theta_{k_0}) = 0$ *i.e.* c_ℓ est divisible dans $\mathbb{Q}[X]$ par le polynôme minimal de θ_{k_0} *i.e.* par P_θ d'où $x_\ell(\theta) = 0$ et $P = 0$. Considérons enfin $(x_1, \ldots, x_t) \in \mathbb{Q}^t$ tel que $P_k(x_1, \ldots, x_t) \in \mathbb{Q}$ pour tout k alors la relation

$$P_1(x_1, \ldots, x_t) z_1 + \cdots + P_{d+1}(x_1, \ldots, x_t) z_{d+1} = 0$$

signifie ques les z_i sont liés sur $\mathbb{Q}$. $\square$

Théorème de Burnside. — *Si G est un sous-groupe de type fini et de torsion de $GL_n(\mathbb{C})$ alors G est d'exposant fini.*

Démonstration. — Soit E le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par une partie génératrice finie de G, on peut supposer que E est une extension finie de degré d de $T = \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_t)$ où les a_i sont algébriquement indépendants. Soit $A \in G$ et ξ une valeur propre de A, comme G est de torsion, A est annulée par un polynôme $X^s - 1$ donc ξ est une racine primitive N-è de l'unité. De plus, ξ est racine de χ_A donc ξ est algébrique sur E de degré $r \leq n$. Le polynôme minimal R de ξ divise $X^N - 1$ dans $E[X]$ donc dans $\mathbb{C}[X]$ donc R s'écrit $R = \prod_{\alpha \in A} (X - \alpha)$ où A est une partie du groupe des racines n-è de l'unité. Donc les coefficients de R sont dans le corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\xi)$ (donc dans $\overline{\mathbb{Q}}$) d'où dans $(E \cap \overline{\mathbb{Q}})[X]$. D'après le second lemme, $E \cap \overline{\mathbb{Q}}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$ de degré au plus d. D'après le premier lemme, il existe $\overline{R} \in \mathbb{Q}[X]$ tel que

$$\overline{R}(\xi) = 0 \ , \ \deg \overline{R} = [E \cap \overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] \deg R \text{ et } \deg \overline{R} \leq dr.$$

Le polynôme minimal ϕ_N de ξ sur $\mathbb{Q}$ divise $\overline{R}$ dans $\mathbb{Q}[X]$ donc $\deg \phi_N \leq \deg \overline{R}$ d'où $\varphi(N) \leq dr \leq dn$. Ainsi $\varphi(N)$ est borné indépendamment de A. Comme $\varphi(N)$ tend vers $+\infty$ quand N tend vers l'infini, N est majoré par une constante e ne dépendant que de G et, quitte à prendre $e!$, on peut supposer que e est un multiple de N. Donc $\xi^e = 1$ *i.e.* les valeurs propres de A^e valent toutes 1 mais $A^e \in G$ est diagonalisable donc $A^e = \mathrm{I}_n$ *i.e.* G est d'exposant fini. □

*********************** reprendre les indices n-N ************

Leçons concernées

07 Groupes linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications

15 Groupe des nombres complexes de module 1. Applications

16 Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geq 2$). Polynômes symétriques. Exemples et applications

17 Racines des polynômes une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications

Référence

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.