DÉVELOPPEMENT 34

SURJECTIVITÉ DE L'EXPONENTIELLE SUR $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Proposition. — *Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = \exp B$.*

Démonstration. — Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ alors, quitte à raisonner sur les blocs de Jordan de A, on peut supposer que A est de la forme $A = \lambda(\mathrm{I}_m + N)$ où N est nilpotente. On pose alors $C = \mathrm{I}_m + N$ et

$$D = \log C = N - \frac{N^2}{2} + \cdots + (-1)^m \frac{N^{m-1}}{m-1}$$

et on va montrer que $\exp D = C$. On considère

$$D(t) = tN - \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + (-1)^m \frac{t^{m-1}}{m-1}N^{m-1}$$

d'où en dérivant

$$D'(t) = N - tN^2 + \cdots + (-1)^m t^{m-2} N^{m-1}$$

et comme $N^m = 0$ (puisque N est nilpotente et que l'on considère des matrices de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$) on a

$$(\mathrm{I}_m + tN)D'(t) = N.$$

Puisque $D(t)$ et $D'(t)$ commutent, en posant $S(t) = \exp D(t)$, il vient

$$S'(t) = D'(t) \exp D(t) \text{ } i.e. \text{ } (\mathrm{I}_m + tN)S'(t) = NS(t)$$

et en dérivant à nouveau, on obtient finalement $(\mathrm{I}_m + tN)S''(t) = 0$ or $\mathrm{I}_m + tN$ est inversible donc $S''(t) = 0$ d'où $S(t) = S(0) + tS'(0) = \mathrm{I}_m + tN$ et pour $t = 1$, on a bien $\exp D = \mathrm{I}_m + N = C$. Considérons maintenant $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $e^\mu = \lambda$ alors

$$\exp(\mu \mathrm{I}_m + D) = \exp(\mu \mathrm{I}_m) \exp D = \lambda \mathrm{I}_m . C = \lambda \mathrm{I}_m(\mathrm{I}_m + N) = A.$$

□

Application. — Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $p \geq 2$ alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = B^p$.

Démonstration. — On a $A = \exp M$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose donc $B = \exp(\frac{1}{p}M)$. □

Remarque. — Ce dernier résultat est faux si A n'est pas inversible. En effet, considérons A nilpotente d'indice n ; si $A = B^p$ alors $B^{np} = A^n = 0$ *i.e.* B est nilpotente donc $B^n = 0$ ce qui contredit le fait que $0 \neq A^{n-1} = B^{p(n-1)}$ dès que $n \geq 2$.

Application. — $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Démonstration. — Soit $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $P = \exp(A)$ et $Q = \exp(B)$. Alors le chemin $\varphi(t) = \exp(tA + (1-t)B)$ est continu, à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ et relie Q à P. □

Proposition. — *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *alors*
$$\exp A = \mathrm{I}_n \iff A \text{ diagonalisable et } \mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$$

Démonstration. — Si A est diagonalisable alors $\exp A$ est clairement diagonalisable. Réciproquement, notons $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A alors $\exp A = \exp D \exp N$, puisque $DN = ND$. D'autre part A et D commutent donc il en est de même de $\exp(A)$ et $\exp(-D)$ or ces deux matrices sont diagonalisables donc on peut les diagonaliser dans une même base et $\exp N = \exp(-D)\exp A$ est donc aussi diagonalisable. Comme la matrice
$$\exp N = \mathrm{I}_n + N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}.$$
est unipotente, on a $\exp N = \mathrm{I}_n$ d'où
$$N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!} = 0$$
et le polynôme
$$Q(X) = X + \frac{X^2}{2} + \cdots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$$
est annulateur pour N. Donc Q est divisible par le polynôme minimal de N qui est de la forme X^k avec $1 \leq k \leq n$ donc $\mu_N = X$ *i.e.* $N = 0$. Donc A est diagonalisable *i.e.* on a
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$
avec P inversible d'où
$$\mathrm{I}_n = \exp A = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}$$
donc
$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} = \mathrm{I}_n$$
i.e. $e^{\lambda_1} = \cdots = e^{\lambda_n} = 1$ donc les λ_j sont dans $2i\pi\mathbb{Z}$. La réciproque est claire. □

Leçons concernées

23 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications
38 Exponentielle de matrices. Applications
39 Endomorphismes nilpotents
40 Polynômes d'endomorphismes. Applications

Référence

X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 1994.

Sébastien Pellerin