DÉVELOPPEMENT 2

SUR L'ESPACE DE BERGMAN

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}$, distinct de $\mathbb{C}$, et $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert.

Définition. — On appelle *espace de Bergman* sur Ω, l'espace $\mathrm{A}^2(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω qui sont dans $L^2(\Omega)$.

On considère sur $\mathrm{A}^2(\Omega)$ la norme $\| \ \|_2$ associée un produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \overline{f(z)} g(z) dm(z) \ , \ f, g \in \mathrm{A}^2(\Omega).$$

Lemme. — *Soit $K \subset \Omega$ un compact et $f \in \mathrm{A}^2(\Omega)$, alors*

$$\max_{z\in K} |f(z)| \leq \frac{1}{d(K, \partial\Omega)\sqrt{\pi}} \|f\|_2 .$$

Démonstration. — Soit $D(a, r) \subset \Omega$ et $\rho \leq r$ alors la formule de Cauchy donne

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

d'où

$$f(a)\frac{r^2}{2} = \int_0^r f(a)\rho d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})\rho d\rho d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{D(a,r)} f(z) dm(z).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \left[\int_{D(a,r)} |f(z)|^2 dz\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{D(a,r)} dz\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \left[\int_{D(a,r)} |f(z)|^2 dz\right]^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(a, \partial\Omega)} \left[\int_{D(a,r)} |f(z)|^2 dz\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(a, \partial\Omega)} \|f\|_2 .$$

Puisque $d(a, \partial\Omega) \geq d(K, \partial\Omega)$ pour tout $a \in K$, on a bien

$$\max_{a\in K} |f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, \partial\Omega)} \|f\|_2 .$$

□

Proposition. — $\mathrm{A}^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration. — Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathrm{A}^2(\Omega)$ et $K \subset \Omega$ compact alors

$$\max_{z\in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, \partial\Omega)} \|f_n - f_m\|_2$$

donc la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur K et, d'après le théorème de Weierstrass, il existe f holomorphe sur Ω qui est limite uniforme sur les compacts de Ω de la suite $(f_n)_n$. Par ailleurs, $L^2(\Omega)$ est complet donc $(f_n)_n$ admet une limite g dans $L^2(\Omega)$; il en résulte qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge presque partout vers g. Donc $f = g$ presque partout *i.e.* f est dans $L^2(\Omega)$. □

Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n.$$

Proposition. — *La suite $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{A}^2(\mathbb{D})$.*

Démonstration. — Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \overline{e_m(z)} e_n(z) dm(z) &= \sqrt{\frac{m+1}{\pi}} \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} \overline{z^n} z^m dm(z) \\
&= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^{n+m+1} e^{i(n-m)\theta} d\rho d\theta \\
&= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}} \frac{1}{n+m+2} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\
&= \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{\pi^2}} \frac{2\pi}{n+m+2} \delta_{n,m} \\
&= \sqrt{\frac{(m+1)^2}{\pi^2}} \frac{2\pi}{2m+2} \delta_{n,m} \\
&= \delta_{n,m}
\end{aligned}$$

i.e. $(e_n)_{n\geq 0}$ est une suite orthonormale.

Soit $f \in \mathrm{A}^2(\mathbb{D})$, on note $c_n(f) = \langle e_n, f \rangle$, montrons que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n, f \rangle|^2 .$$

Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{D}$, on peut écrire $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ dans $\mathbb{D}$, alors (par convergence dominée)

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^n f(z) dm(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1^-} \int_{|z|<r} \overline{z}^n f(z) dm(z)$$

et par convergence uniforme de la série ci-dessus dans le disque $D(0, r)$, il vient

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \int_{|z|<r} \overline{z}^n z^k dm(z)$$

or

$$\int_{|z|<r} \overline{z}^n z^n dm(z) = \frac{2\pi r^{n+k+2}}{n+k+2} \delta_{k,n} = \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \delta_{k,n}$$

d'où

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} \delta_{k,n} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \alpha_n \lim_{r\to 1^-} r^{2n+2} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \alpha_n.$$

D'autre part, on a

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dm(z) = \lim_{r\to 1^-} \int_{|z|<r} f(z) \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{\alpha_k z^k} dm(z) = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{\alpha_k} \int_{|z|<r} f(z) \overline{z}^k dm(z)$$

mais

$$\int_{|z|<r} f(z) \overline{z}^k dm(z) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell \frac{\pi r^{2k+2}}{k+1} \delta_{k,\ell} = \alpha_k \frac{\pi r^{2k+2}}{k+1}$$

d'où

$$\|f\|_2^2 = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi}{k+1} \overline{\alpha_k}\alpha_k r^{2k+2} = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k(f)|^2\, r^{2k+2}.$$

Puisque $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |c_k(f)|^2\, r^{2k+2} \leq \|f\|_2^2$ pour tout $0 < r < 1$, on peut conclure par convergence dominée. $\square$

Pour tout $(\zeta, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, on pose $k(\zeta, z) = \dfrac{1}{\pi(1-\overline{\zeta}z)^2}$ et on note $k(\zeta, \cdot) : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, z \mapsto k(\zeta, z)$.

Proposition. — *On a $k(\zeta,\cdot) \in \mathrm{A}^2(\mathbb{D})$ et, pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$ et tout $F \in \mathrm{A}^2(\mathbb{D})$,*

$$F(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} \overline{k(\zeta, z)} F(z) dm(z).$$

Démonstration. — La fonction $k(\zeta, \cdot)$ est continue dans le disque $\{z; |z| \leq \frac{1}{\zeta}\}$ donc est de carré intégrable sur $\mathbb{D}$ et il s'agit clairement d'une fonction holomorphe donc $k(\zeta, \cdot) \in \mathrm{A}^2(\mathbb{D})$. Puisque $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne, on a

$$\langle k(\zeta,\cdot), F\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, F\rangle \langle k(\zeta,\cdot), e_n\rangle$$

d'où, en notant $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_k z^k$ dans $\mathbb{D}$,

$$\langle k(\zeta,\cdot), F\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \alpha_n \langle k(\zeta,\cdot), e_n\rangle.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\langle k(\zeta,\cdot), e_n\rangle &= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{D}} \frac{z^n}{(1-\zeta\overline{z})^2} dm(z) = \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{D}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\zeta\overline{z})^k \right)' z^n dm(z) \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{D}} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(\zeta\overline{z})^k z^n dm(z) = \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\zeta^k \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^k z^n dm(z) \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{3/2}} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\zeta^k \frac{2\pi}{2m+2} \delta_{n,k} = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \zeta^n
\end{aligned}$$

d'où

$$\langle k(\zeta,\cdot), F\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \alpha_n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \zeta^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \zeta^n = F(\zeta)$$

i.e. $F(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} \overline{k(\zeta, z)} F(z) dm(z)$. $\square$

Leçons concernées

01 Espaces de fonctions. Exemples et applications
02 Exemples de parties denses et applications
05 Espaces complets. Exemples et applications
09 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités
12 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie
13 Bases hilbertiennes. Exemples et applications
33 Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$
34 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications
38 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications
41 Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries
44 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications
45 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$

Références

A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 3*, Dunod, 1996.
F. Bayen et C. Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, Ellipses, 1986.

Sébastien Pellerin