DÉVELOPPEMENT 4

VECTEURS PROPRES DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER DANS L^2

Lemme. — *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est mesurable non nulle presque partout et telle qu'il existe* $\delta > 0$ *vérifiant* $f = O(e^{-\delta|x|})$. *Alors* $\mathrm{Vect}(x^n f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Si $\mathrm{Vect}(x^n f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dense dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ alors il existe $h \in L^2(\mathbb{R})$ non nulle presque partout telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)h(x)dx = 0.$$

L'inégalité de Cauhcy-Schwarz donne $fh \in L^1(\mathbb{R})$ donc on peut considérer sa transformée de Fourier

$$g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Si $0 < \xi < \delta$ alors $e^{\xi|x|}f(x)h(x) \in L^1(\mathbb{R})$ d'après l'hypothèse sur f donc (en utilisant le théorème d'holomorphie sous le signe somme) g se prolonge analytiquement sur la bande $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Im}\ (z) < \delta\}$. D'après la propriété vérifiée par h et en utilisant le théorème de dérivation de la transformée de Fourier, on obtient que toutes les dérivées de g sont nulles en 0. D'après l'analyticité de g, g est identiquement nulle et l'injectivité de la transformation de Fourier donne $fh = 0$ presque partout, c'est absurde puisque f et h sont toutes deux non nulles presque partout. □

La dérivée d'ordre n de $H(t) = e^{-t^2}$ est de la forme $e^{-t^2}H_n(t)$ où $H_n(t)$ est un polynôme appelé *polynôme de Hermite*, déterminé par la relation de récurrence $H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) + H_n'(t)$, de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$. Les *fonctions de Hermite* sont alors définies par

$$h_n(t) = (n!2^n\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}H_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Proposition. — *La famille* $(h_n)_n$ *est une base hilbertienne de* $L^2(e^{-t^2}dt)$.

Démonstration. — Si P est un polynôme de degré au plus $n-1$ alors une intégration par parties donne (par définition de H_n et puisque $P^{(n)} = 0$)

$$\int_{\mathbb{R}} P(t)H_n(t)e^{-t^2}dt = \int_{\mathbb{R}} P(t)H^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} P^{(n)}(t)H(t)dt = 0$$

ce qui montre que la famille $(h_n)_n$ est orthogonale. La formule d'intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}} (H_n(t))^2 e^{-t^2}dt = \int_{\mathbb{R}} H_n(t)H^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_n^{(n)}(t)e^{-t^2}dt$$

d'où puisque le coefficient dominant de H_n est $(-2)^n$

$$\int_{\mathbb{R}} (H_n(t))^2 e^{-t^2}dt = 2^n n! \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

donc $(h_n)_n$ est bien une famille orthonormale. Puisque les polynômes H_n sont de degré échelonnés, il découle du lemme que la famille $(h_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. □

Proposition. — $\widehat{h_n} = \sqrt{2\pi}(-i)^n h_n$

Démonstration. — On rappelle que la gaussienne $G(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ vérifie $\widehat{G}(x) = \sqrt{2\pi}G(x)$ *i.e.*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On remplace t par $t + 2u$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2+4ut+4u^2}{2}} e^{-itx} e^{-2iux} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-2ut-u^2} e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} e^{u^2} e^{2iux} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{t^2}{2}} H(t+u) e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} e^{u^2} e^{2iux} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} H(iu - x) e^{\frac{x^2}{2}}$$

et cette intégrale est une fonction holomorphe en u donc on peut dériver de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{du^n} \left[H(t+u)\right] e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} \frac{d^n}{du^n} \left[H(iu - x) e^{\frac{x^2}{2}}\right]$$

et pour $u = 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} \frac{d^n}{du^n} \left[H(iu - x) e^{\frac{x^2}{2}}\right]_{u=0} = \sqrt{2\pi} i^n H_n(-x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

i.e. en tenant compte de la parité de H_n

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itx} dt = \sqrt{2\pi} i^n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

d'où $\widehat{h_n(x)} = \sqrt{2\pi} i^n h_n(x)$. □

Leçons concernées

01 Espaces de fonctions. Exemples et applications
02 Exemples de parties denses et applications
10 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications
12 Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie
13 Bases hilbertiennes. Exemples et applications
33 Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$
38 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications
39 Transformation de Fourier et produit de convolution

Référence

A. Kolmogorov, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Mir Ellipses, 1994.

Sébastien Pellerin