DÉVELOPPEMENT 7

ÉTUDE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y'' + q(t)y = 0$

On considère l'équation différentielle (L) : $y'' + q(t)y = 0$.

Proposition. — *Si $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue et telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |q(t)|\, dt$ converge alors*

(i) toute solution bornée y vérifie $y' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$,

(ii) (L) admet des solutions non bornées.

Démonstration. — On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} y''(t)dt = -\int_0^{+\infty} q(t)y(t)dt$ or y est bornée et l'intégrale $\int_0^{+\infty} |q(t)|\, dt$ converge donc y' admet une limite en $+\infty$. Supposons que cette limite soit $\alpha \neq 0$, alors $y'(t) \sim \alpha$ en $+\infty$ donc $\int_0^x y'(t)dt \sim \int_0^x \alpha dt$ *i.e.* $y(x) \sim \alpha x$ en $+\infty$ ce qui est absurde puisque y est bornée.

Soit (u, v) une base de solutions de (L). Si (L) n'admet que des solutions bornées alors u' et v' tendent vers 0 en $+\infty$ donc le wronskien $uv' - u'v$ tend aussi vers 0. Le wronskien de deux solutions f, g de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ est donné par

$$\text{wronskien}(f, g)(t) = \text{wronskien}(f, g)(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s)ds\right)$$

donc, dans le cas de (L), le wronskien de u et v est constant donc est nul (puisqu'il tend vers 0). C'est absurde puisque u et v forment une base de solutions donc (L) a des solutions bornées. □

Proposition. — *Si $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante alors toutes les solutions de (L) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.*

Démonstration. — Soit y une solution de (L) sur $\mathbb{R}^+$, on a $2y'y'' + 2q(t)y(t)y'(t) = 0$ d'où en intégrant

$$\forall t \geq 0\ ,\ y'(t)^2 - y'(0)^2 + 2\int_0^t q(s)y(s)y'(s)ds = 0$$

puis en intégrant par parties, il vient

$$\forall t \geq 0\ ,\ y'(t)^2 + q(t)y(t)^2 = y'(0)^2 + q(0)y(0)^2 + \int_0^t q'(s)y(s)^2 ds$$

d'où (en notant $K = y'(0)^2 + q(0)y(0)^2$)

$$\forall t \geq 0\ ,\ q(t)y(t)^2 \leq K + \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} q(s)y(s)^2 ds.$$

D'après le lemme de Gronwall, on a

$$\forall t \geq 0\ ,\ q(t)y(t)^2 \leq K \exp\left(\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} ds\right) = K\frac{q(t)}{q(0)}$$

i.e. $y(t)^2 \leq \frac{K}{q(0)}$ pour tout $t \geq 0$. □

Proposition. — *Si $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et strictement négative sur $\mathbb{R}$ alors*
(i) la fonction nulle est la seule solution réelle bornée sur $\mathbb{R}$,
(ii) une solution non nulle s'annule au plus une fois.

Démonstration. — Soit f une solution de (L) sur $\mathbb{R}$, on pose $z = f^2$, alors $z'' = 2ff'' + (f')^2$ *i.e.* on a $z'' = 2q(t)f^2 + (f')^2$ donc $z'' \geq 0$ et il en résulte que la fonction z est convexe. Il y a deux cas possibles :
– Si z est constante alors f est constante donc nulle.
– Sinon, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z'(t_0) \neq 0$ or z est convexe donc sa courbe représentative est au-dessus de sa tangente en t_0 *i.e.* $z(t) \geq z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0)$; selon le signe de $z'(t_0)$, $z(t)$ tend donc vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Donc f n'est pas bornée.
Si f est une solution qui s'annule en deux points t_1 et t_2 (avec $t_1 < t_2$) alors $z = f^2$ aussi mais z est convexe positive donc $z(t) = 0$ sur $[t_1, t_2]$ et le théorème de Cauchy-Lipschtitz implique que $z(t) = 0$ pour tout t. Ainsi, une solution qui s'annule en deux points est identiquement nulle. □

Proposition. — *Si $q : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et si (L) admet une solution y nulle en a et b et > 0 sur $]a, b[$ alors $\displaystyle\int_a^b |q(t)|\, dt > \frac{4}{b-a}$.*

Démonstration. — Puisque y est continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y(c)$ soit maximal. Comme $y(a) = y(b) = 0$ et $y(t) > 0$ sur $]a, b[$, on a $c \in]a, b[$. Pour tous $a < \alpha < \beta < b$, on a

$$\int_a^b |q(t)|\, dt = \int_a^b \left|\frac{y''(t)}{y(t)}\right| dt > \frac{1}{y(c)} \int_a^b \left|y''(t)\right| dt \geq \frac{1}{y(c)} \left|y'(\beta) - y'(\alpha)\right|.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\alpha \in]a, c[$ et $\beta \in]c, b[$ tels que

$$\frac{y(c) - y(a)}{c - a} = y'(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{y(b) - y(c)}{b - c} = y('\beta)$$

donc

$$\int_a^b |q(t)|\, dt > \frac{1}{y(c)} \left|\frac{y(b) - y(c)}{b - c} - \frac{y(c) - y(a)}{c - a}\right| = \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a}.$$

Or la fonction $c \mapsto \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$ atteint son minimum pour $c = \frac{a+b}{2}$ et vaut alors $\frac{4}{b-a}$. □

Leçons concernées

20 Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives de solutions
21 Équations différentielles linéaires. Exemples
22 Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées

Référence

X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.

Sébastien Pellerin