DÉVELOPPEMENT 10

SUITES ÉQUIRÉPARTIES

On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de $[0,1[$ est *équirépartie* si, pour tous $0 \leq a < b < 1$, on a

$$\frac{1}{n} N(a,b,n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} b - a$$

où $N(a,b,n) = \operatorname{card}\{m \leq n \,;\, a \leq x_m \leq b\}$.

Proposition. — *Soit $(x_n)_n$ une suite de $[0,1[$ alors on a équivalence entre :*

(i) $(x_n)_n$ *est équirépartie modulo 1*

(ii) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)$ *pour toute fonction 1-périodique continue f,*

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^n e^{2i\pi m x_k} = o(n)$ *pour tout $m \in \mathbb{Z}$ non nul*

Démonstration. — On pose $S_n(f) = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)$.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Considérons tout d'abord une fonction en escalier η sur $[0,1[$ *i.e.* il existe une partition $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = 1$ et $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ tels que $\eta(x) = c_j$ pour $a_{j-1} < x < a_j$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \eta(x_k) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^m c_j N(a_{j-1}, a_j, n) - \sum_{j=0}^m \eta(a_j) N(a_j, a_j, n)\right].$$

La suite $(x_n)_n$ est équirépartie donc $\frac{1}{n}N(a_{j-1}, a_j, n)$ tend vers $a_j - a_{j-1}$ d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \eta(x_k) &= \sum_{j=1}^m c_j(a_j - a_{j-1}) - \sum_{j=0}^m \eta(a_j)\left[\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}N(a_j,a_j,n)\right] \\
&= \int_0^1 \eta(x)dx - \sum_{j=0}^m \eta(a_j)\left[\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}N(a_j,a_j,n)\right].
\end{aligned}$$

Mais pour tout $a \in [0,1[$ et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$0 \leq \frac{1}{n}N(a,a,n) \leq \frac{1}{n}N(a, a+\varepsilon, n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varepsilon$$

donc $N(a,a,n) = o(n)$ et il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \eta(x_k) = \int_0^1 \eta(x)dx.$$

Considérons maintenant une fonction f Riemann-intégrable. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe φ et ψ en escalier sur $[0,1[$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_0^1 (\psi(x) - \varphi(x))dx \leq \varepsilon$ donc $S_n(\varphi) \leq S_n(f) \leq S_n(\psi)$, $\left|\int_0^1 f - \int_0^1 \varphi\right| < \varepsilon$ et $\left|\int_0^1 f - \int_0^1 \psi\right| < \varepsilon$ or $S_n(\varphi)$ et $S_n(\psi)$ tendent respectivement vers $\int_0^1 \varphi(x)dx$ et $\int_0^1 \psi(x)dx$ donc $S_n(f)$ tend bien vers $\int_0^1 f(x)dx$ quand n tend vers l'infini.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Fixons $x \in [0,1[$ et considérons la fonction φ valant 0 sur $[0,x[$ et 1 sur $[x,1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ (et tel que $x+\varepsilon < 1$), on considère la fonction $t \mapsto \varphi_\varepsilon(t)$ valant 0 sur $[0,x[$, $\frac{t-x}{\varepsilon}$ sur $[x,x+\varepsilon[$ et 1 sur $[x+\varepsilon,1]$: il s'agit d'une fonction continue donc $S_n(\varphi_\varepsilon)$ tend vers

$$\int_0^1 \varphi_\varepsilon(t)dt = \int_x^{x+\varepsilon} \frac{t-x}{\varepsilon}dt + \int_{x+\varepsilon}^1 dt = \int_0^\varepsilon \frac{u}{\varepsilon}du + \int_{x+\varepsilon}^1 dt = \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon} + 1 - (x+\varepsilon) = 1 - x - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or $\varphi_\varepsilon \leq \varphi$ donc $S_n(\varphi_\varepsilon) \leq S_n(\varphi)$ pour tout entier n, il s'ensuit que $\liminf\limits_{n\to+\infty} S_n(\varphi) \geq 1-x$.
De même, pour tout $\varepsilon > 0$, on considère la fonction $t \mapsto \psi_\varepsilon(t)$ valant 0 sur $[0,x-\varepsilon[$, $\frac{t-x+\varepsilon}{\varepsilon}$ sur $[x-\varepsilon,x[$ et 1 sur $[x,1]$: il s'agit d'une fonction continue donc $S_n(\psi_\varepsilon)$ tend vers

$$\int_0^1 \psi_\varepsilon(t)dt = \int_{x-\varepsilon}^{x} \frac{t-x+\varepsilon}{\varepsilon}dt + \int_x^1 dt = \int_0^\varepsilon \frac{u}{\varepsilon}du + \int_x^1 dt = \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon} + 1 - x = 1 - x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or $\psi_\varepsilon \geq \varphi$ donc $S_n(\psi_\varepsilon) \geq S_n(\varphi)$ pour tout entier n, il s'ensuit que $\limsup\limits_{n\to+\infty} S_n(\varphi) \leq 1-x$.
Par conséquent on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\varphi) = 1 - x = \int_0^1 \varphi(t)dt$$

et ce résultat s'applique pour $\chi_{[a,b[}$ car c'est une combinaison linéaire de fonctions du type φ.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ C'est clair puisque les $e_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto e^{2i\pi mx}$ sont continues.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (ii)}$ Pour tout $m \neq 0$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{2i\pi m x_k} = o(n)$ *i.e.* $S_n(e_m) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} e^{2i\pi m x_k}$ tend vers 0 donc $S_n(e_m)$ tend vers $\int_0^1 e_m(x)dx$. Pour $m = 0$, on a $S_n(e_0) = 1$ et $\int_0^1 e_0(x)dx = 1$. Par linéarité, $S_n(T)$ tend vers $\int_0^1 T(x)dx$ pour tout polynôme trigonométrique T.

Considérons f continue et $\varepsilon > 0$ alors, d'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme trigonométrique T tel que $\|T - f\|_\infty < \varepsilon$ d'où $|T(\{x_k\}) - f(\{x_k\})| < \varepsilon$ pour tout k, puis $|S_n(T) - S_n(f)| < \varepsilon$. On a donc pour tout entier n

$$\begin{aligned}\left|S_n(f) - \int_0^1 f(x)dx\right| &\leq |S_n(f) - S_n(T)| + \left|S_n(T) - \int_0^1 T(x)dx\right| + \int_0^1 |T(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq 2\varepsilon + \left|S_n(T) - \int_0^1 T(x)dx\right|\end{aligned}$$

or $S_n(T)$ tend vers $\int_0^1 T(x)dx$ donc $S_n(f)$ tend vers $\int_0^1 f(x)dx$. □

Leçons concernées

02 Exemples de parties denses et applications
09 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités
23 Convergence des suites numériques. Exemples et applications
24a Comportement asymptotique des suites numériques. Exemples
24b Rapidité de convergence d'un suite. Exemples
32 Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables
36 Problèmes de convergence ou de divergence d'un intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Références

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 2è éd., 1997.

E. Leichtnam, *Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des E.N.S., Tome d'analyse*, Ellipses, 2000.

Sébastien Pellerin