DÉVELOPPEMENT 14

MÉTHODE DE GAUSS ET POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Proposition. — *Soit $a < b$, $\omega :]a,b[\to \mathbb{R}$ une application continue strictement positive et $\ell \geq 0$. Il existe une unique famille de points $a < x_0 < \cdots < x_\ell < b$ et une unique famille de réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_\ell$ tels que la méthode d'intégration donnée par*

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dt \simeq \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j)$$

soit d'ordre $2\ell+1$. De plus l'erreur est donnée par

$$E(f) = \frac{\left|f^{2\ell+2}(\xi)\right|}{(2\ell+2)!} \int_a^b (\pi_{\ell+1}(x))^2 \omega(x)dx$$

où $\xi \in]a,b[$ et $\pi_{\ell+1}$ est le $(\ell+1)$-è polynôme orthogonal associé au poids ω.

Démonstration. — On commence par montrer l'unicité. Supposons qu'il existe de tels x_j et λ_j, on pose

$$\pi_{\ell+1}(t) = (t - x_0) \cdots (t - x_n).$$

Soit P un polynôme de degré au plus ℓ alors $\deg P\pi_{\ell+1} \leq 2\ell + 1$ donc

$$\int_a^b P(t)\pi_{\ell+1}(t)\omega(t)dt = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j P(x_j)\pi_{\ell+1}(x_j) = 0$$

i.e. $\pi_{\ell+1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{\ell+1}[X]$ or $\pi_{\ell+1}$ est unitaire donc il s'agit du $(\ell+1)$-è polynôme orthogonal associé au poids ω et les x_j sont donc parfaitement déterminés comme étant ses racines. Notons L_i un polynôme (par exemple de Lagrange) tel que $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ alors

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j L_i(x_j) = \int_a^b L_i(x)\omega(x)dx$$

et les λ_i sont aussi uniques.

Montrons maintenant l'existence. On note $x_0, \ldots, x_\ell$ les $\ell+1$ racines (distinctes) de $\pi_{\ell+1}$ dans $]a,b[$, $L_0, \ldots, L_n$ des polynômes définis par $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ et on pose $\lambda_i = \int_a^b L_i(x)\omega(x)dx$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ alors le polynôme d'interpolation de Lagrange de f est $P_\ell(x) = \sum\limits_{j=0}^{\ell} f(x_j)L_j(x)$ d'où

$$\int_a^b P_\ell(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} f(x_j) \int_a^b L_j(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j).$$

L'égalité précédente montre que la méthode est exacte si $f \in \mathbb{R}_\ell[X]$ puisque, dans ce cas, on a $f = P_\ell$. Si $f \in \mathbb{R}_{2\ell+1}[X]$ alors la division euclidienne de f par $\pi_{\ell+1}$ donne $f(x) = q(x)\pi_{\ell+1}(x) + r(x)$ avec $\deg q \leq \ell$ et $\deg r < \ell + 1$ d'où

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \int_a^b q(x)\pi_{\ell+1}(x)\omega(x)dx + \int_a^b r(x)\omega(x)dx.$$

Mais $\pi_{\ell+1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_\ell[X]$ donc $\int_a^b q(x)\pi_{\ell+1}(x)\omega(x)dx = 0$ et la méthode est exacte pour r puisque $\deg r \leq \ell$ d'où

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j r(x_j).$$

Comme $f(x_j) = r_j$ pour tout j, il vient

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j)$$

et la méthode est donc exacte pour les polynômes de degré au plus $2\ell+1$.

Soit $H_f \in \mathbb{R}_{2\ell+1}[X]$ un polynôme vérifiant $H_f(x_i) = f(x_i)$ et $H_f'(x_i) = f'(x_i)$. On fixe x dans $]a,b[$ distinct des x_i et on pose $\varphi(t) = f(t) - H_f(t) - k_x(\pi_{\ell+1}(x))^2$ où k_x est une constante fixée de sorte que $\varphi(x) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c_x \in]a,b[$ tel que $\varphi^{2\ell+2}(c_x) = 0$ d'où $k_x = \dfrac{f^{2\ell+2}(c_x)}{(2\ell+2)!}$ puis

$$f(x) - H_f(x) = \frac{f^{2\ell+2}(c_x)}{(2\ell+2)!}(\pi_{\ell+1}(x))^2.$$

Puisque H_f est un polynôme de degré $2\ell+1$, la méthode est exacte pour H_f, on a donc

$$\int_a^b H_f(x)\omega(x)dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j) = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j)$$

d'où

$$E(f) = \left| \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j) \right| = \frac{\left| f^{2\ell+2}(c_x) \right|}{(2\ell+2)!} \int_a^b (\pi_{\ell+1}(x))^2 \omega(x)dx.$$

En particulier, on a

$$E(x \mapsto x^{2\ell+2}) = \int_a^b (\pi_{\ell+1}(x))^2 \omega(x)dx \neq 0$$

donc la méthode est d'ordre $2\ell+1$. Enfin, on a

$$E(f) \leq \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j H_f(x_j) = \frac{\left\| f^{2\ell+2} \right\|_\infty}{(2\ell+2)!} \left\| \pi_{\ell+1} \right\|_2^2.$$

□

Leçons concernées

11 Utilisation de la dimension finie en analyse
24a Comportement asymptotiques des suites numériques. Exemples
24b Rapidité de convergence d'une suite. Exemples
32 Intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables
37 Méthodes de calcul des valeurs approchées d'une intégrale
48 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales ou polynômiales par morceaux. Exemples

Références

J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 1996.
J.-E. Rombaldi, *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 1999.

Sébastien Pellerin