DÉVELOPPEMENT 16

THÉORÈME DE HELLY

Théorème. — *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes d'un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_n$ soit bornée. Alors on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ telle que, pour tout $x \in I$, la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_n$ soit convergente.*

Démonstration. — • On note (x_n) les éléments de $\mathbb{Q} \cap I^*$. Puisque la suite $(f_n(x_0))_n$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite $(f_{\phi_0(n)}(x_0))_n$ convergente. Supposons que, pour $p \geq 0$, on ait construit $\phi_0, \ldots, \phi_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que, pour tout $0 \leq k \leq p$, la suite $(f_{\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_k(n)}(x_k))_n$ converge. Dans ce cas, la suite $(f_{\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_k(n)}(x_{p+1}))_n$ est bornée donc on peut en extraire une sous-suite $(f_{\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_k \circ \phi_{k+1}(n)}(x_{p+1}))_n$ convergente. On considère la fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\psi(n) = \phi_0 \circ \cdots \circ \phi_k(n)$ alors la fonction ψ est strictement croissante donc la suite $(f_{\psi(n)}(x_p))_n$ est extraite de la suite $(f_{\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_p(n)}(x_p))_n$. Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(f_{\psi(n)}(x_p))_n$ converge, on note $g(x_p)$ sa limite.

• Soit $x, y \in \mathbb{Q} \cap I$ avec $x < y$ alors (puisque $f_{\psi(n)}$ est croissante) on a $f_{\psi(n)}(x) \leq f_{\psi(n)}(y)$ d'où, en passant à la limite, $g(x) \leq g(y)$. Soit $x \in I \setminus \mathbb{Q}$, puisque $\mathbb{Q} \cap I$ est dense dans l'intervalle ouvert I, il existe $x_0 > x$ tel que $x_0 \in \mathbb{Q} \cap I$. Pour tout $y \in \mathbb{Q} \cap I$ tel que $y < x$, on a alors $g(y) \leq g(x_0)$ donc l'ensemble $E_x = \{g(y); \; ; \; y \in \mathbb{Q} \cap I \text{ et } y < x\}$ est majoré et il est non vide puisque I est ouvert. Cet ensemble admet donc une borne supérieure. On peut donc prolonger g à I en posant

$$g(x) = \sup E_x = \sup\{g(y); \; ; \; y \in \mathbb{Q} \cap I \text{ et } y < x\} \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad x \in I \setminus \mathbb{Q}.$$

Soit $x \in I \setminus \mathbb{Q}$ et $x_0 \in \mathbb{Q} \cap I$, la définition de $g(x)$ assure que $g(x) \leq g(x_0)$ lorsque $x < x_0$ et que $g(x) \geq g(x_0)$ lorsque $x > x_0$. Si $x, x' \in I \setminus \mathbb{Q}$ avec $x < x'$ alors $E_x \subset E_{x'}$ donc $g(x) \leq g(x')$. La fonction g est donc croissante sur I.

• On note C l'ensemble des points de I où g est continue Soit $x \in C$ et $y, z \in I \cap \mathbb{Q}$ tels que $y < x < z$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_{\psi(n)}(y) \leq f_{\psi(n)}(x) \leq f_{\psi(n)}(z)$ et en passant aux limites, il vient

$$g(y) = \lim_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(y) \leq \liminf_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq \limsup_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq \lim_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(z) = g(z).$$

On fait ensuite tendre y et z vers x en restant dans $I \cap \mathbb{Q}$ alors, comme g est continue en x, on obtient

$$g(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq \limsup_{n \to +\infty} f_{\psi(n)}(x) \leq g(x).$$

Il s'ensuit que la suite $(f_{\psi(n)}(x))_n$ est convergente, de limite $g(x)$.

Une fonction croissante n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité donc l'ensemble $D = I \setminus C$ est dénombrable. En raisonnant comme dans la première partie de la preuve, on montre qu'il existe $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(f_{\psi \circ \theta(n)}(x))_n$ converge pour tout $x \in D$. Comme par ailleurs, pour tout $x \in C$, $(f_{\psi \circ \theta(n)}(x))_n$ est une suite extraite de $(f_{\psi(n)}(x))_n$, il s'agit d'une suite convergente (de limite $g(x)$). Donc on a bien extrait une sous-suite $(f_{\psi \circ \theta(n)})_n$ de $(f_n)_n$ telle que $(f_{\psi \circ \theta(n)}(x))_n$ converge pour tout $x \in I$. $\square$

Leçons concernées

09 Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités
28 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Référence

G. Lacombe et P. Massat, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

Sébastien Pellerin