DÉVELOPPEMENT 23

FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Théorème (Formule sommatoire de Poisson). — *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ avec $|f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(m)| < \infty$ alors*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m) = 2\pi \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(2\pi m).$$

Démonstration. — Si $|x| \leq A$ et $|m| \geq A$ alors $|x + 2\pi m| \geq 2\pi |m| - |x| \geq |m|$ donc

$$|f(x + 2\pi m)| \leq \frac{M}{(1+m)^\alpha}$$

donc (cette série étant normalement convergente sur les compacts) on définit une fonction continue 2π-périodique en posant

$$\varphi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi m).$$

Calculons le coefficient de Fourier de φ d'indice m :

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x + 2k\pi) e^{-imx} dx$$

et la convergence uniforme sur les compacts de la série permet d'écrire

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x + 2k\pi) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(y) e^{-imy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-imy} dy$$

i.e.

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(m).$$

Mais par hypothèse

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m(\varphi)| = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(m)| < +\infty$$

or une fonction continue dont la série de Fourier converge normalement peut être développée en série de Fourier d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m) e^{imx}$$

i.e.

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m) e^{imx}$$

et pour $x = 0$, on obtient bien le résultat annoncé. □

Exemple. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-ax^2} = e^{-\frac{(\sqrt{2a}x)^2}{2}}\ ,\ a > 0.$$

On a alors

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\sqrt{2a}x)^2}{2}} e^{-i\xi x}dx = \frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-i\frac{\xi}{\sqrt{2a}}u}du$$

or si $G(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$ alors

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\widehat{G}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2a}}G\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right)$$

i.e.

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

On peut donc appliquer la formule de Poisson, de sorte que

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{m^2}{4a}} = 2\pi\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-4a\pi^2m^2}.$$

En particulier, si $\theta(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi tm^2}$ pour $t > 0$ alors

$$\theta(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi tm^2} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-4a\pi^2m^2}$$

où $a = \frac{t}{4\pi}$, d'où

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{m^2}{4a}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi^2}{t}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi m^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Leçons concernées

39 Transformation de Fourier et produit de convolution
40 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples
41 Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries
46 Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications

Références

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 2è éd., 1997.
X. Gourdon, *Analyse*, Ellipses, 1994.
C. Zuily et H. Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995.

Sébastien Pellerin