DÉVELOPPEMENT 25

FORMES LINÉAIRES ET CONNEXITÉ

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et ϕ une forme linéaire sur E, on pose $H = \ker \phi$.

Proposition. — *ϕ est continue si et seulement si $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.*

Démonstration. — Si ϕ est continue alors $E \setminus H$ est la réunion disjointe des deux ouverts

$$\{x \in E; \phi(x) > 0\} \quad \text{et} \quad \{x \in E; \phi(x) < 0\}$$

donc $E \setminus H$ n'est pas connexe.

Réciproquement, supposons que ϕ ne soit pas continue. Puisque les ensembles $\{x \in E; \phi(x) > 0\}$ et $\{x \in E; \phi(x) < 0\}$ sont convexes, il s'agit de parties connexes par arcs donc il suffit de construire un chemin continu entre $a \in E$ tel que $\phi(a) = 1$ et $-a$. Le fait que ϕ ne soit pas continue si traduit par

$$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \alpha > 0 \ , \ \exists x \in E \ / \ \|x\| < \alpha \ \text{ et } \ \phi(x) > \varepsilon.$$

Posons $x_0 = a$ alors (pour $\alpha = \frac{\varepsilon \|x_0\|}{2}$), on a

$$\exists \widetilde{x_1} \in E \ / \ \|\widetilde{x_1}\| < \frac{\varepsilon \|x_0\|}{2} \ \text{ et } \ \phi(\widetilde{x_1}) > \varepsilon$$

puis on pose

$$x_1 = \frac{1}{\phi(\widetilde{x_1})} \widetilde{x_1}$$

de sorte que $\phi(x_1) = 1$ et

$$\|x_1\| = \frac{1}{\phi(\widetilde{x_1})} \|\widetilde{x_1}\| < \frac{1}{\varepsilon} \|\widetilde{x_1}\| < \frac{1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon \|x_0\|}{2} = \frac{\|x_0\|}{2}.$$

En réitérant le procédé, on construit ainsi une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de E vérifiant pour tout $n \geq 0$

$$\phi(x_n) = 1 \ , \ \|x_{n+1}\| < \|x_n\| \ \text{ et } \ x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par ailleurs, on a $E = H \oplus \mathbb{R}a$ donc, pour tout $n \geq 0$, on peut écrire $x_n = h_n + \lambda_n a$ avec $h_n \in H$ et $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Mais on a $\phi(x_n) = \phi(a) = 1$ et $\phi(h_n) = 0$ donc $\lambda_n = 1$ *i.e.* $x_n = h_n + a$ pour tout $n \geq 0$.

On peut donc considérer une application $f :]0, \|x_0\|] \to E$ en posant

$$\forall t \in] \|x_{n+1}\|, \|x_n\|] \ , \ f(t) = \frac{1}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|} ((\|x_{n+1}\| - t)(x_n + h_n) + (t - \|x_n\|)(x_{n+1} + h_{n+1}))$$

et cette application est continue sur $]0, \|x_0\|]$ puisque $f(\|x_n\|) = x_n + h_n$ et f est affine par morceaux.

Pour tout $t \in] \|x_{n+1}\|, \|x_n\|]$, on a

$$\begin{aligned}
\phi(f(t)) &= \frac{1}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|} ((\|x_{n+1}\| - t)\phi(x_n + h_n) + (t - \|x_n\|)\phi(x_{n+1} + h_{n+1})) \\
&= \frac{1}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|} ((\|x_{n+1}\| - t) + (t - \|x_n\|)) = 1
\end{aligned}$$

donc f est un chemin continu dans $E \setminus H$.

Enfin, pour tout $t \in] \|x_{n+1}\|, \|x_n\|]$, on a

$$\begin{aligned} f(t)+a &= f(t) + \frac{a(\|x_{n+1}\| - t) + a(t - \|x_n\|)}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|} \\ &= \frac{1}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|} \left((\|x_{n+1}\| - t)(x_n + h_n + a) + (t - \|x_n\|)(x_{n+1} + h_{n+1} + a) \right) \\ &= \frac{2}{\|x_{n+1}\| - \|x_n\|} \left((\|x_{n+1}\| - t)x_n + (t - \|x_n\|)x_{n+1} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\|f(t)+a\| \leq \frac{2}{\|x_n\| - \|x_{n+1}\|} \left((t - \|x_{n+1}\|) \|x_n\| + (\|x_n\| - t) \|x_{n+1}\| \right) = 2t$$

et il s'ensuit que

$$f(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} -a.$$

Ainsi, quitte à prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = -a$, on a bien construit un chemin continu dans $E \setminus H$ d'extrémités $-a$ et $f(\|x_0\|) = x_0 + h_0 = a$. $\square$

Leçons concernées

04 Connexité. Exemples et applications

10 Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications