DÉVELOPPEMENT 26

SOUS-GROUPES COMPACTS DE $GL_n(\mathbb{R})$

Proposition. — *Soit E un espace euclidien de dimension N et H un sous-groupe compact de $GL(E)$. Si K est un convexe compact de E tel que $u(K) \subset K$ pour tout $u \in H$, alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in H$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que $\displaystyle\bigcap_{u \in H} \{x \in K; u(x) = x\} \neq \emptyset$ donc, puisque K est compact et puisque $\{x \in K; u(x) = x\}$ est fermé pour tout $u \in H$, il s'agit de montrer que si $u_1, \ldots, u_p \in H$ alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \{x \in K; u_i(x) = x\} \neq \emptyset$.

On pose $v = \frac{1}{p}(u_1 + \cdots + u_p)$ alors on a $v(K) \subset K$ par convexité et puisque $u_i(K) \subset K$ pour tout $1 \leq i \leq p$. Si $x_0 \in K$ est fixé, on note $x_k = \frac{1}{k}(x_0 + v(x_0) + \cdots + v^{[k-1]}(x_0))$ alors

$$v(x_k) = \frac{1}{k}\left(v(x_0) + v^{[2]}(x_0) + \cdots + v^{[k]}(x_0)\right) = x_k - \frac{1}{k}x_0 + \frac{1}{k}v^{[k]}(x_0).$$

Puisque la suite $(x_k)_k$ est à valeurs dans le compact K, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_k$ qui converge vers un élément $a \in K$. On a alors

$$\left\| v(x_{\varphi(k)}) - x_{\varphi(k)} \right\| = \frac{1}{k}\left\| x_0 - v^{[k]}(x_0) \right\| \leq \frac{1}{k}\operatorname{diam}(K) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

or $x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} a$ et v est continue d'où $v(a) = a$.

Si $x \in K$ est fixé alors $u \in H \mapsto \|u(x)\|$ est continue sur le compact H donc on peut poser

$$\|x\|' = \sup_{u \in H} \|u(x)\|.$$

Les relations $\|\lambda x\|' = |\lambda| \|x\|'$ et $\|x + y\|' \leq \|x\|' + \|y\|'$ sont claires et si $\|x\|' = 0$ alors $u(x) = 0$ (*i.e.* $x \in \ker u$) pour tout $u \in H$ mais $H \subset GL(\mathbb{R}^N)$ donc $x = 0$. Donc $\| \ \|'$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$. Qui plus est, pour tout $f \in H$, on a

$$\|x\|' = \sup_{u \in H} \|u(x)\| = \sup_{(u \circ f) \in H} \|u \circ f(x)\| = \sup_{u \in H} \|u(f(x))\| = \|f(x)\|'.$$

D'autre part, on peut supposer que la norme $\| \ \|$ est la norme euclidienne. Si $\|x + y\|' = \|x\|' + \|y\|'$ alors il existe $u_0 \in H$ tel que $\|x + y\|' = \|u_0(x + y)\| = \|u_0(x) + u_0(y)\|$ (en effet, le sup est atteint en un certain $u_0 \in H$) or

$$\begin{aligned}\|x + y\|'^2 = \|u_0(x) + u_0(y)\|^2 &= \|u_0(x)\|^2 + \|u_0(y)\|^2 + 2\|u_0(x)\|\|u_0(y)\| \\ &\leq \|x\|'^2 + \|y\|'^2 + 2\|u_0(x)\|\|u_0(y)\|\end{aligned}$$

d'où

$$\|u_0(x)\|^2 + \|u_0(y)\|^2 + 2\langle u_0(x), u_0(y)\rangle = \|u_0(x)\|^2 + \|u_0(y)\|^2 + 2\|u_0(x)\|\|u_0(y)\|$$

i.e. $\langle u_0(x), u_0(y)\rangle = \|u_0(x)\|\|u_0(y)\|$ donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $u_0(x) = \lambda u_0(y)$ ou $u_0(y) = \lambda u_0(x)$. En composant par u_0^{-1}, on a $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

• Puisque $v(a) = a$, on a

$$\|a\|' = \|v(a)\|' = \frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) + u_p(a)\right\|' \leq \frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a)\right\|' + \frac{1}{p}\|u_p(a)\|' \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\|u_k(a)\|' = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\|a\|' = \|a\|'$$

d'où

$$\frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) + u_p(a)\right\|' = \frac{1}{p}\left\|\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a)\right\|' + \frac{1}{p}\|u_p(a)\|'$$

et d'après le point précédent, il existe $\lambda_p \geq 0$ tel que

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) = \lambda_p \frac{1}{p} u_p(a) \quad \text{ou} \quad \lambda_p \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) = \frac{1}{p} u_p(a).$$

Le cas où $\lambda_p = 0$ correspond à $a = 0$ donc a est alors clairement un point fixe commun aux u_i puisque ce sont des isomorphismes. On peut donc supposer qu'il existe $\lambda_p > 0$ tel que

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) = \lambda_p \frac{1}{p} u_p(a)$$

puis (en substituant ci-dessus)

$$\frac{\lambda_p + 1}{p}\|u_p(a)\|' = \frac{1}{p}\|\lambda_p u_p(a)\|' + \frac{1}{p}\|u_p(a)\|' = \|a\|'$$

or $\|u_p(a)\|' = \|a\|'$ donc $\lambda_p = p - 1$, d'où

$$v(a) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} u_k(a) + \frac{1}{p} u_p(a) = \frac{1}{p}\lambda_p u_p(a) + \frac{1}{p} u_p(a) = u_p(a).$$

Ce qui a été montré pour l'indice p peut en fait être fait pour n'importe quel indice $1 \leq i \leq p$ donc on a en fait $u_i(a) = v(a) = a$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En particulier, on a bien $\bigcap_{i=1}^{p}\{x \in K; u_i(x) = x\} \neq \emptyset$. □

Proposition. — *Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $PGP^{-1} \subset \mathcal{O}(n)$.*

Démonstration. — • On considère l'application $\rho : G \to GL(\mathrm{Sym}_n), A \mapsto \rho_A$ où $\rho_A(S) = {}^tASA$. Cette application est bien définie puisque ${}^tASA \in \mathrm{Sym}_n$ lorsque $S \in \mathrm{Sym}_n$ et ρ_A est inversible (d'inverse $\rho_{A^{-1}}$). L'application ρ est la composée de l'application $A \mapsto (A, A)$ et de l'application bilinéaire $(A, B) \mapsto (S \mapsto {}^tASB)$ donc ρ est continue.

• Puisque ρ est continue sur le compact G, le groupe $H = \rho(G)$ est compact. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{E} = \{{}^tMM; M \in G\}$ est compact donc (d'après le théorème de Carathéodory), son enveloppe convexe K est compacte. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont des matrices symétriques définies positives (puisque ${}^tMM$ est symétrique et, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, on a MX non nul, d'où ${}^tX({}^tMM)X = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2 > 0$) or Sym_n^{++} est convexe donc $K \subset \mathrm{Sym}_n^{++}$. Enfin, si $B \in K$, alors il existe $\alpha \in [0, 1]$, ${}^tMM \in \mathcal{E}$ et ${}^tNN \in \mathcal{E}$ tels que $B = \alpha\,{}^tMM + (1 - \alpha)\,{}^tNN$; considérons un élément $u \in H$, on a $u = \rho_A$ pour un certain $A \in G$, d'où

$$\begin{aligned} u(B) &= \alpha u({}^tMM) + (1 - \alpha)u({}^tNN) = \alpha\rho_A({}^tMM) + (1 - \alpha)\rho_A({}^tNN) \\ &= \alpha\,{}^tA({}^tMM)A + (1 - \alpha)\,{}^tA({}^tNN)A = \alpha\,{}^t(MA)MA + (1 - \alpha)\,{}^t(NA)NA \end{aligned}$$

or $A \in G$ donc $MA, NA \in G$ donc $u(B) \in K$. On a donc montré que H est un sous-groupe compact de $GL(\mathbb{R}^N)$ (où N est la dimension de Sym_n^{++}) et K est un compact convexe de $\mathrm{Sym}_n^{++} \simeq \mathbb{R}^N$ qui est stable par tous les éléments de H. D'après la proposition précédente, il existe $S \in K$ tel que $u(S) = S$ pout tout $u \in H$ *i.e.* $\rho_A(S) = S$ pour tout $A \in G$, ce qui signifie que ${}^tASA = S$ pour tout $A \in G$.

• Enfin, la matrice $S \in K$ est symétrique définie positive donc il en est de même de la matrice S^{-1} ; il s'ensuit que S^{-1} admet une racine carrée symétrique définie positive *i.e.* il existe une matrice R symétrique définie positive telle que $S = R^2 = {}^tRR$. Pour tout $A \in G$, la relation ${}^tASA = S$ s'écrit donc ${}^tA\,{}^tRRA = {}^tRR$ *i.e.* ${}^tR^{-1}\,{}^tA\,{}^tRRAR^{-1} = \mathrm{I}_n$ d'où ${}^t(RAR^{-1})RAR^{-1} = \mathrm{I}_n$ *i.e.* $RAR^{-1} \in \mathcal{O}(n)$. □

Sébastien Pellerin

Leçons concernées

03 Utilisation de la notion de compacité

06 Utilisation de théorèmes de point fixe

11 Utilisation de la dimension finie en analyse

Référence

M. Alessandri, *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

Sébastien Pellerin