DÉVELOPPEMENT 27

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$

On pose $a_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$ alors $|a_n| = \frac{1}{n^\alpha}$ donc cette série converge absolument pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 0$. On suppose désormais que $0 < \alpha \leq 1$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$b_n = a_{n^2} + \cdots + a_{(n+1)^2-1} = (-1)^n \beta_n \quad \text{où} \quad \beta_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

La décroissance sur $]0, +\infty[$ de l'application $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ montre que

$$\frac{2n+1}{(n+1)^{2\alpha}} \leq \beta_n \leq \frac{2n+1}{n^{2\alpha}}$$

et il s'ensuit que β_n ne tend pas vers 0 pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Donc la série $\sum b_n$ diverge et le théorème de sommation par tranches assure que la série $\sum a_n$ est alors aussi divergente.

On suppose maintenant que $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. L'encadrement de β_n ci-dessus montre que β_n tend vers 0. D'autre part, la décroissance sur $]0, +\infty[$ de l'application $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ donne $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ d'où

$$\beta_n \geq \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{dt}{t^\alpha} = I_n \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} \leq \int_{(n+1)^2-1}^{(n+2)^2-1} \frac{dt}{t^\alpha} = J_{n+1}$$

d'où

$$\beta_n - \beta_{n+1} \geq I_n - J_{n+1}.$$

Pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, on a

$$I_n = \frac{n^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha} \left(\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{1-\alpha} - 1 \right)$$

et

$$J_{n+1} = \frac{n^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha} \left(\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}\right)^{1-\alpha} - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1-\alpha} \right)$$

d'où

$$I_n - J_{n+1} = \frac{4\alpha - 2}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right)$$

au voisinage de $+\infty$. Donc la série $\sum b_n$ converge.

Pour $\alpha = 1$, il existe $N \geq 1$ tel que $I_n - J_{n+1} \geq 0$ dès que $n \geq N$ et on a *a fortiori* $\beta_n \geq \beta_{n+1}$. Donc la série $\sum b_n$ converge d'après le théorème des séries alternées.

Dans les deux cas, la série somme par tranches converge et a_n est de signe constant sur chaque tranche. Donc la série $\sum a_n$ converge pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Leçon concernée

30 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques

Référence

E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux *Exercices d'analyse 2*, Masson, 1993.

Sébastien Pellerin