DÉVELOPPEMENT 29

THÉORÈME DE TIETZE

Lemme. — *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont des espaces de Banach.*
On suppose qu'il existe $0 < \alpha < 1$ et $C < \infty$ tels que, pour tout $y \in F$ vérifiant $\|y\| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que $|x| \leq C$ et $\|y - T(x)\| \leq \alpha$. Alors, pour tout $y \in F$ vérifiant $\|y\| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que $y = T(x)$ et $|x| \leq \frac{C}{1-\alpha}$.

Démonstration. — On construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ vérifiant

$$\|x_n\| \leq C \quad \text{et} \quad \|y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \cdots - \alpha n - 1T(x_n)\| \leq \alpha^n.$$

Par hypothèse, x_1 existe. Supposons $x_1, \ldots, x_n$ construits alors

$$\left\| \frac{y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \cdots - \alpha n - 1T(x_n)}{\alpha^n} \right\| \leq 1$$

donc il existe $x_{n+1} \in E$ tel que $|x_{n+1}| \leq C$ et

$$\left\| \frac{y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \cdots - \alpha n - 1T(x_n)}{\alpha^n} - T(x_{n+1}) \right\| \leq \alpha$$

i.e.

$$\|y - T(x_1) - \alpha T(x_2) - \cdots - \alpha n - 1T(x_n) - \alpha^n T(x_{n+1})\| \leq \alpha^{n+1}.$$

On pose alors $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{n-1} x_n$ (il s'agit d'une série normalement convergente dans l'espace de Banach E donc convergente) alors on a

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{n-1} \|x_n\| \leq \frac{C}{1-\alpha}$$

et en passant à la limite dans la relation

$$\|y - T(x_1) - \cdots - \alpha n - 1T(x_n)\| \leq \alpha^n$$

on obtient bien $T(x) = y$. □

Théorème. — *Soit Y un fermé d'un espace métrique (X, d) et $g_0 : Y \to \mathbb{R}$ continue. Alors g_0 admet un prolongement continu $f_0 : X \to \mathbb{R}$.*

Démonstration. — On note $\mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}_b^0(Y, \mathbb{R})$) l'espace des fonctions continues bornées définies sur X (resp. Y) à valeurs réelles muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ (resp. $\|f\|_\infty = \sup_{y\in Y} |f(y)|$) et on considère l'application "restriction à Y"

$$T : \mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b^0(Y, \mathbb{R}), f \mapsto f_{|F}.$$

Soit $g \in \mathcal{C}_b^0(Y, \mathbb{R})$ telle que $\|g\|_\infty \leq 1$, on pose

$$Y^+ = \{y \in Y \ ; \ \frac{1}{3} \leq g(y) \leq 1\} \quad \text{et} \quad Y^- = \{y \in Y \ ; \ -1 \leq g(y) \leq -\frac{1}{3}\}$$

et

$$f(y) = \frac{1}{3}\frac{d(y,Y^-) - d(y,Y^+)}{d(y,Y^-) + d(y,Y^+)}$$

alors $f \in \mathcal{C}_b^0(X,\mathbb{R})$ et $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{3}$. Montrons que $\|T(f) - g\|_\infty \leq \frac{2}{3}$ en distinguant trois cas :
– si $y \in Y^+$ alors $g(y) - f(y) = g(y) - \frac{1}{3} \in [0, \frac{2}{3}]$,
– si $y \in Y^-$ alors $g(y) - f(y) = g(y) + \frac{1}{3} \in [-\frac{2}{3}, 0]$,
– si $y \in Y \setminus (Y^+ \cup Y^-)$ alors $|g(y) - f(y)| \leq |g(y)| + |f(y)| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
On peut appliquer le lemme (avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $C = \frac{2}{3}$) donc, pour tout $g \in \mathcal{C}_b^0(Y,\mathbb{R})$ vérifiant $\|g\|_\infty \leq 1$, il existe $f \in \mathcal{C}_b^0(X,\mathbb{R})$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq 1$ et $T(f) = g$.

Supposons maintenant que $g \in \mathcal{C}_b^0(Y,\mathbb{R})$ vérifie $|g(y)| < 1$ pour tout $y \in Y$. D'après ce qui précède, il existe un prolongement h tel que $|h(x)| \leq 1$ pour tout $x \in X$. On veut montrer qu'il existe un prolongement f de g tel que $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in X$: c'est fini si $|h(x)| < 1$ pour tout $x \in X$, sinon on pose $f = uh$ où

$$u(x) = \frac{d(x,Z)}{d(x,Y) + d(x,Z} \quad \text{où} \quad Z = \{x \in X; |h(x)| = 1\}$$

alors f répond bien au problème puisque $u \equiv 1$ sur Y, $|f(x)| \leq |h(x)|$ pour tout $x \in X$ et $f(x) = 0$ si $|h(x)| = 1$.

Pour conclure, on considère un homéomorphisme φ de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ alors $g = \varphi \circ g_0$ admet un prolongement f tel que $|f(x)| < 1$ pour tout $x \in X$ donc $f_0 = \varphi^{-1} \circ f$ prolonge bien g. □

Leçon concernée

07 Prolongements de fonctions. Applications

Référence

H. Queffélec et C. Zuily, *Éléments d'analyse*, Dunod, 2002.