DÉVELOPPEMENT 31

PROLONGEMENT DE LA FONCTION ζ DE RIEMANN

On pose $\theta(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 t}$ pour $t > 0$ et on admet l'équation fonctionnelle $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$.

Théorème. — *La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}-\{1\}$ et admettant un pôle simple en 1.*

Démonstration. — Soit s tel que $\sigma = \text{Re } s > 1$ alors

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{s}{2}-1}dx = \pi^{\frac{s}{2}}n^s\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{s}{2}-1}dy$$

donc

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \pi^{\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{s}{2}-1}dy.$$

On considère pout $t > 0$ la fonction

$$\widetilde{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{2}\left(\theta(t)-1\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\widetilde{\theta}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}.$$

La suite $(f_N)_N$ de fonctions définie pour $y \geq 0$ par

$$f_N(y) = \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{s}{2}-1}$$

converge simplement vers la fonction $y \mapsto \widetilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}$ et on a

$$|f_N(y)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{\sigma}{2}-1} = g(y).$$

Or d'après le théorème de Fubini on a

$$\int_0^{+\infty} g(y)dy = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\frac{\sigma}{2}-1}dy = \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{\pi^{\frac{\sigma}{2}}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\sigma} < \infty$$

i.e. $g \in L^1$ et, d'après le théoème de Lebesgue, on a

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \pi^{\frac{s}{2}}\int_0^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}dy.$$

Or

$$\int_0^1 \widetilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}dy = \int_0^1 \widetilde{\theta}\left(\frac{1}{y}\right)y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}dy + \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}dy - \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1}dy$$

i.e.

$$\int_0^1 \widetilde{\theta}(y)y^{\frac{s}{2}-1}dy = \int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(u)u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}du + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

d'où
$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{\frac{s}{2}}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)+\pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{s}{2}-1}+y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dy.$$
Pour tout $y\geq 1$, l'application
$$s\mapsto\widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{s}{2}-1}+y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)$$
est holomorphe dans $\mathbb{C}$. D'autre part on a pour $y\geq 1$
$$\widetilde{\theta}(y)=\sum_{n\geq 1}e^{-\pi n^2 y}\leq\sum_{n\geq 1}e^{-\pi n y}=\frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi y}}\leq\frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi}}$$
donc, si s est dans un compact de $\mathbb{C}$ *i.e.* si $-\infty<a\leq\operatorname{Re}s\leq b<+\infty$ alors
$$\left|\widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{s}{2}-1}+y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\right|\leq\frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi}}\left(y^{\frac{b}{2}-1}+y^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}\right)$$
donc l'application
$$\psi:s\mapsto\pi^{\frac{s}{2}}\int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{s}{2}-1}+y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dy$$
est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Ainsi, on a
$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{\frac{s}{2}}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)+\psi(s)$$
or la fonction Γ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, ne s'annule pas, a pour pôles simples les entiers négatifs et la fonction $\frac{1}{\Gamma}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc la fonction ζ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet au plus un pôle simple en 0 et en 1. Or Γ admet un pôle simple en 0 donc ζ n'admet pas 0 pour pôle. □

Leçons concernées

07 Prolongements de fonctions. Applications

29 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

34 Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications

38 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications

39 Transformation de Fourier et produit de convolution

40 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

41 Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries

44 Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications

45 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$

47 Exemples de problèmes d'interversion de limites

Compléments

Résidu en 1. —
Pour Re $s>1$, on a

$$\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2(s-1)\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}=\frac{1}{s-1}\left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}+(s-1)\phi(s)\right)$$

avec ϕ holomorphe sur $\mathbb{C}$. Or $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}$ donc

$$\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s-1}\left(1+(s-1)\phi(s)\right)=\frac{1}{s-1}+\phi(s).$$

On a donc en fait

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\eta(s)$$

avec η holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Équation fonctionnelle vérifiée par ζ. —
Pour tout s, on pose

$$\xi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

i.e. d'après ce qui précède

$$\xi(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{s}{2}-1}+y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dy.$$

On a donc

$$\xi(1-s)=\frac{1}{(1-s)-1}-\frac{1}{1-s}+\int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)\left(y^{\frac{1-s}{2}-1}+y^{-\frac{1-s}{2}-\frac{1}{2}}\right)dy$$

i.e.

$$\xi(1-s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\int_1^{+\infty}\widetilde{\theta}(y)\left(y^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+y^{\frac{s}{2}-1}\right)dy$$

et on obtient donc $\xi(s)=\xi(1-s)$ *i.e.*

$$\zeta(s)=\pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s).$$

Autour de la fonction Γ. —
Pour $x>0$, on a en appliquant le théorème de convergence monotone

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt=\lim_{n\to+\infty}n^x\int_0^n s^{x-1}\left(1-s\right)^n ds.$$

Or on montre aisément par récurrence que pour tout $n\geq 1$ et tout $x>0$

$$\int_0^n s^{x-1}\left(1-s\right)^n ds=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!}.$$

On pose

$$G(z)=\lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{(n+1)^z n!}=\lim_{n\to+\infty}G_n(z)$$

ainsi

$$G_n(z)=\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{(n+1)^z n!}=z\prod_{k=1}^n f_k(z)\text{ où }f_k(z)=\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}.$$

Si $|z|\leq R$ et $k>R$ alors $\frac{|z|}{k}<1$ donc

$$f_k(z)=\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}=e^{\log\left(1+\frac{z}{k}\right)-z\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

et il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{R<k\leq n} f_k(z)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Ainsi la suite de fonctions holomorphes G_n converge-t-elle uniformément sur les compacts vers la fonction G *i.e.* G est holomorphe et s'annule aux points annulant les G_n. Donc la fonction $\frac{1}{\Gamma}$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ et s'annule aux entiers négatifs.

Il n'y a aucun zéro dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\ s \geq 1\}$. —
Si Re $s > 1$ alors on peut écrire pour tout premier p

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{p^{ks}}$$

donc, en notant $(p_i)_i$ la suite croissante des nombre premiers, on a

$$\prod_{i=1}^{A}\frac{1}{1-p_i^{-s}} = \prod_{i=1}^{A}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_i^{ks}} = \sum_{k_1,\ldots,k_A\geq 1}\frac{1}{(p_1^{k_1}\cdots p_A^{k_A})^s} = \sum_{n\in N_A}\frac{1}{n^s}$$

où N_A est l'ensemble des entiers admettant exactement $p_1,\ldots,p_A$ comme facteurs premiers. Or $n \leq p_A$ implique que $n \notin N_A$ donc

$$\left|\sum_{n\in N_A}\frac{1}{n^s} - \sum_{n\leq p_A}\frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n>p_A}\frac{1}{n^s} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

donc pour Re $s > 1$ on a

$$\zeta(s) = \prod_{p\ premier}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Si Re $s > 1$ alors $\prod_{p\ premier}(1-p^{-s})$ est un nombre complexe que l'on note $\psi(s)$ donc

$$\psi(s)\ \zeta(s) = \prod_{p\ premier}(1-p^{-s})\prod_{p\ premier}\frac{1}{1-p^{-s}} = 1$$

donc $\zeta(s) \neq 0$ *i.e.* la fonction ζ ne s'annule pas dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\ s \geq 1\}$.

Les zéros de la fonction ζ sont de deux types. —
Puisque $\zeta(s) \neq 0$ pour Re $(s) > 1$, on a $\zeta(1-s) \neq 0$ pour Re $(s) < 0$. D'autre part la fonction Γ ne s'annule pas et admet des pôles simples aux entiers négatifs, il résulte donc de l'égalité

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s)$$

que les zéros de ζ dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\ s < 0\}$ sont les entiers $-2,-4,-6,\ldots$. Ainsi, les zéros de la fonction ζ sont de deux types : les entiers négatifs pairs et les éventuels zéros situés dans la *bande critique* $\{0 \leq \mathrm{Re}\ s \leq 1\}$.

Références

A. Chambert-Loir, S. Fermigier et V. Maillot, *Exercices d'analyse 1*, Masson, 2è éd., 1997.

A. Chambert-Loir et S. Fermigier, *Exercices d'analyse 2*, Dunod, 1999.

C. Zuily et H. Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, 1995.

Sébastien Pellerin