Une démonstration du théorème de représentation conforme de Riemann

March 22, 2001

Mots-clés: holomorphie, connexité, compacité, problème d'extrémum.

Tout d'abord, rappelons le :

Théorème Soit U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$. Alors on a les implications suivantes :

(1) U est analytiquement isomorphe à $D(0,1)$,

$$\Downarrow$$

(2) U est simplement connexe, i.e. tout lacet de U se déforme en un point de U,

$$\Downarrow$$

(3) toute fonction holomorphe sur U a une primitive dans U,

$$\Downarrow$$

(4) toute fonction holomorphe inversible sur U est l'exponentielle d'une fonction holomorphe,

$$\Downarrow$$

(5) toute fonction holomorphe inversible sur U est le carré d'une fonction holomorphe,

Démonstration.

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ C'est trivial !

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Soit f une fonction holomorphe sur U. Par hypothèse, on a, pour tout lacet γ de U :

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Construisons une primitive de f, i.e. une fonction holomorphe F sur U vérifiant $F' = f$. Soient z et $z_0 \in U$. Pour tous les chemins $\gamma : [0,1] \to U$ tels que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$, la quantité $\int_\gamma f(u)du$ est la même. On la note $F(z)$. Montrons que $F'(z)$ existe et vaut $f(z)$. Soit $w \in U$ un point proche de z tout au moins tel que le segment $[z,w]$ soit entièrement contenu dans U. Si γ est un chemin quelconque allant de z_0 à z, et si γ' est la réunion du chemin γ et du segment $[z,w]$, on a :

$$F(z) = \int_\gamma f(u)du,$$

$$F(w) = \int_{\gamma'} f(u)du,$$

et :

$$F(w) - F(z) = \int_{[z,w]} f(u)du = (w-z)\int_0^1 f[(1-t)z + tw]dt.$$

Ainsi :

$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z} = \int_0^1 f[z + t(w-z)]dt$$

tend vers $f(z) = \int_0^1 f(z)dt$ quand w tend vers z.

$\boxed{(3) \Rightarrow (4)}$ Soit f une fonction holomorphe et inversible sur U (i.e. $f(z) \neq 0\ \forall z \in U$). Alors $\frac{f'}{f}$ est holomorphe et admet donc une primitive g par hypothèse. La quantité $e^{-g}f$ est constante (dériver pour s'en convaincre) égale à $c \in \mathbb{C}^*$. Comme il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $e^a = c$, il vient $f = e^{a+g}$.

$\boxed{(4) \Rightarrow (5)}$ Soit f une fonction holomorphe et inversible sur U. Par hypothèse, il existe une fonction holomorphe g sur U telle que $e^g = f$. Alors $h = e^{\frac{g}{2}}$ vérifie $h^2 = f$. $\square$

Le but de ce papier est de démontrer le :

Théorème *(de représentation conforme de Riemann)* Sous les hypothèses du théorème précédent, et si $U \neq \mathbb{C}$, on a $(5) \Rightarrow (1)$.

La démonstration de ce résultat nécessite plusieurs ingrédients :
- le théorème de Montel,
- le théorème de l'application ouverte,
- le fait que l'ensemble des fonctions holomorphes injectives ou constantes sur un ouvert donné est fermé dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur cet ouvert,

- quelques résultats sur les homographies du plan complexe,
que nous allons maintenant détailler.

Contentons-nous de rappeler l'énoncé des deux premiers ingrédients :

Théorème *(de Montel)* Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, toute partie $\mathcal{H}$ de $\mathrm{Hol}(U)$ bornée sur tout compact de U est relativement compacte.

Théorème *(de l'application ouverte)* Toute fonction analytique $f : U \to \mathbb{C}$ non constante sur l'ouvert connexe U est ouverte.

Enonçons et démontrons l'ingrédient suivant :

Proposition Soient U un ouvert connexe et $F = \{f \in \mathrm{Hol}(U)$: f est injective ou constante$\}$. Alors F est fermé dans $\mathrm{Hol}(U)$.

Démonstration. Nous aurons besoin du :

Lemme. Soient V un ouvert connexe et (g_n) une suite de fonctions de $\mathrm{Hol}(V)$ inversibles (i.e. qui ne s'annulent pas) convergeant uniformément sur tout compact de V vers une fonction g. Alors soit g est la fonction nulle, soit g est inversible.

Avant de le démontrer, montrons comment il permet de conclure. Soit (f_n) une suite de fonctions injectives de $\mathrm{Hol}(U)$ et convergeant uniformément sur tout compact de U vers une fonction f. Montrons que f est injective ou constante. Raisonnons par l'absurde et supposons que f est ni injective ni constante. Il existe alors deux éléments distincts a et b tels que $f(a) = f(b)$. Soit U' l'ouvert connexe $U - \{a\}$. Posons $g(z) = f(z) - f(a)$ sur U'. Comme $g(b) = 0$, g n'est pas inversible. Pourtant, la suite de fonctions $\big((f_n - f_n(a))_{|U'}\big)$ est inversible et converge uniformément sur tout compact de U' : c'est absurde !□

Preuve du lemme. Raisonnons par l'absurde. Nous supposons que g n'est pas identiquement nulle mais qu'il existe $a \in U$ tel que $g(a) = 0$. D'après le théorème des zéros isolés, il existe $r > 0$ tel que $\inf_{|z-a|=r} |g(z)| > 0$. Si $n \in \mathbb{N}$, appliquons le principe du maximum à $\frac{1}{g_n}$. On obtient :

$$|g_n(a)| \geq \inf_{|z-a|=r} |g_n(z)|.$$

En passant à la limite, on a :

$$0 = |g(a)| \geq \inf_{|z-a|=r} |g(z)| > 0,$$

ce qui est absurde !□

Enfin, nous aurons besoin de la :

Proposition Soit $a \in D$. L'homographie $\varphi_a : D \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

est un automorphisme analytique de D d'inverse φ_{-a}. De plus, on a :

$$\varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}.$$

Démonstration. On vérifie facilement que $\varphi_{-a} \circ \varphi_a = id$ prouvant déjà que φ_a est injective. On a de plus :

$$|\varphi_a(z)| < 1 \Leftrightarrow |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |a|^2 < 1 - 2\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |a|^2|z|^2$$

$$\Leftrightarrow (1-|a|^2)(1-|z|^2) > 0 \Leftrightarrow |z| < 1$$

ce qui permet de conclure.□

Faisons maintenant la démonstration du théorème de représentation conforme de Riemann :

Démonstration. Soit $a \in U$. Nous définissons :

$$S_1 = \{f \in \mathrm{Hol}(U) : \ |f(z)| \leq 1, \ \forall z \in U\},$$

$$S_2 = \{f \in \mathrm{Hol}(U) : \ f(a) = 0\},$$

$$S_3 = \{f \in \mathrm{Hol}(U) : \ f \text{ injective ou constante}\},$$

et :

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3.$$

Nous allons montrer successivement que :
(1) S n'est pas réduit à la fonction nulle,
(2) S est compact et $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto |f'(a)|$ est continue et atteint son maximum en une fonction $g \in \mathrm{Hol}(U)$,
(3) g est un isomorphisme analytique entre U et D.

(1) Donnons-nous $\omega \in \mathbb{C} - U$. La fonction $z \longmapsto z - \omega$ est inversible dans U, donc il existe $g \in \mathrm{Hol}(U)$ telle que :

$$\forall z \in U : \ g(z)^2 = z - \omega.$$

On a nécessairement :

$$\mathrm{Im}g \cap \mathrm{Im}(-g) = \emptyset \ (*)$$

(sinon, on aurait l'existence de $z, z' \in U$ tels que $g(z) = -g(z')$ et, en élevant au carré, on aurait $z = z'$. Ceci impliquerait que $g(z) = 0$ ou encore que $z = \omega \in U$, ce qui est absurde !). Grâce au théorème de l'application ouverte (g étant trivialement non constante), Img est un ouvert : il contient donc un disque $D(b, r)$ pour un certain élément $b \in U$ et un certain réel $r > 0$. De $(*)$, on tire :

$$\forall z \in U : \ |g(z) + b| \geq r$$

ou encore, si l'on pose $f = \frac{r}{g(z)+b}$:

$$\forall z \in U : \ |f(z)| \leq 1.$$

Il est immédiat de voir que f est, comme g, injective. Pour construire un élément de S, il suffit maintenant de considérer l'application $h = \varphi_{f(a)} \circ f$.

(2) S_1 est compact (c'est le théorème de Montel), S_2 est trivialement fermé et S_3 est fermé grâce à une proposition vue plus haut. Ainsi, S est compact, comme fermé dans un compact. L'application $f \mapsto |f'(a)|$ est continue comme composée d'applications continues ($f \mapsto f'$ est continue comme on le voit en passant à la limite dans la formule de Cauchy). Elle atteint donc son maximum.

(3) Il suffit de montrer que g est une bijection de U sur D (une bijection holomorphe est automatiquement un isomorphisme analytique : on n'a pas besoin de vérifier l'holomorphie de l'inverse). L'injectivité est immédiate par construction puisque g est évidemment non constante (sinon, elle serait nulle et ne réaliserait pas le maximum de ϕ). Reste à montrer la surjectivité. Comme $g \in S_1$ et grâce au théorème de l'application ouverte, g vérifie nécessairement $g(U) \subset D$. Par l'absurde, supposons l'existence de $\zeta \in D - g(U)$. Nous allons construire $h \in S$ vérifiant $|h'(a)| > |g'(a)|$ ce qui sera absurde. L'application $\varphi_\zeta \circ g$ est inversible dans U, donc il existe $h_1 \in \mathrm{Hol}(U)$ vérifiant :

$$\forall z \in U : \ h_1(z)^2 = \frac{g(z) - \zeta}{1 - \bar{\zeta} g(z)} \ (**).$$

Posons $h = \varphi_{h_1(a)} \circ h_1$ $(***)$. Il est clair que $h \in S$. Calculons $|h'(a)|$. De $(**)$, on tire :

$$|h_1(a)|^2 = |\zeta|$$

et :
$$2|h_1(a)||h_1'(a)| = \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{\zeta}g(z)|^2}g'(z).$$
D'où, en différentiant dans $(***)$:
$$|h'(a)| = |h_1'(a)||\varphi'_{h_1(a)}(h_1(a))|$$
$$= \frac{1+|\zeta|}{2\sqrt{|\zeta|}}|g'(a)|.$$
Or comme, pour tout $x \in]0,1[$, le réel $\frac{1+x^2}{2x}$ est > 1, on a $|h'(a)| > |g'(a)|$, ce qui est absurde ! $\square$.

Bibliographie

Jean Varouchas - Cours de géométrie et d'analyse complexe de maîtrise - Université de Nancy, 1999.