Calcul de la transformée de Laplace d'une fonctionnelle quadratique du mouvement brownien

Ivan Nourdin

29 octobre 2001

Mots-clés: méthode hilbertienne, opérateur compact, problème de Sturm-Liouville, développement eulérien.

Nous allons démontrer le :

Théorème 1.
L'égalité :

$$E\left(\exp\left(-\frac{a^2}{2}\int_0^1 B(s)^2 ds\right)\right) = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{ch}(a)}}$$

a lieu pour tout $a \geq 0$.

en utilisant des résultats de la théorie des opérateurs compacts (sur ce sujet, [1] est une excellente référence). Commençons par énoncer la :

Proposition 2.
Si $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue et symétrique, alors l'endomorphisme* T *défini sur* $L^2(0,1)$ *par :*

$$T(\varphi)(t) = \int_0^1 K(s,t)\varphi(s)ds$$

est un opérateur compact symétrique.

Preuve. Si ε est > 0, on sait (c'est le théorème de Heine appliqué à K) qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall s \in [0,1],\ \forall t,t' \in [0,1],\ |t-t'| < \alpha \Rightarrow |K(s,t) - K(s,t')| < \varepsilon.$$

Ajouté à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que l'image par T de la boule unité de $L^2(0,1)$ forme une famille équicontinue et équibornée de $C(0,1)$. Elle donc relativement compacte par le théorème d'Ascoli. La symétrie de T est une conséquence immédiate de la symétrie du noyau K.$\square$

Rappelons aussi le résultat suivant, tiré de [1] page 97 :

Théorème 3.
Soit T un opérateur autoadjoint compact défini sur un espace de Hilbert H séparable. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

De la proposition 2 et du théorème 3, on en déduit le :

Théorème 4.
Soit (G_j) une suite de var indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrée réduite. Si $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de covariance d'un processus gaussien centré X, si (λ_j) est la suite des valeurs propres de l'opérateur intégral compact T défini à l'aide du noyau K, et si (φ_j) est la suite des vecteurs propres associés, alors le processus Y défini sur $[0,1]$ par :

$$Y(t) = \sum_j \sqrt{\lambda_j} G_j \varphi_j(t)$$

est un processus gaussien de même loi que X.

Preuve. Calculons la fonction de covariance H de Y :

$$H(s,t) = E(Y(s)Y(t)) = \sum_j \lambda_j \varphi_j(t) \varphi_j(s)$$

$$= \sum_j \left(\int_0^1 K(u,t) \varphi_j(u) du \right) \varphi_j(t) = K(s,t)$$

L'avant dernière égalité découle du fait que les λ_j sont les valeurs propres de T et la dernière du fait que les φ_j forment une base hilbertienne.$\square$

On en déduit la méthode générale suivante :

Proposition 5.
Si X est un processus gaussien de fonction de covariance K et si les λ_j sont les valeurs propres de l'opérateur compact associé, alors l'égalité :

$$E\left(\exp\left(-u \int_0^1 X(s)^2 ds\right)\right) = \prod_j \sqrt{\frac{1}{1+2u\lambda_j}}$$

a lieu pour tout $u \geq 0$.

Preuve. D'après la relation de Parseval, on a :

$$\int_0^1 X(s)^2 ds = \sum_j \lambda_j G_j^2$$

On en déduit :

$$E\left(\exp\left(-u\int_0^1 X(s)^2 ds\right)\right) = E\left(\exp\left(\sum_j -u\lambda_j G_j^2\right)\right)$$

$$= E\left(\prod_j \exp\left(-u\lambda_j G_j^2\right)\right) = \prod_j E\left(\exp\left(-u\lambda_j G_j^2\right)\right)$$

De plus, d'après un calcul immédiat :

$$E\left(\exp\left(-u\lambda G^2\right)\right) = \sqrt{\frac{1}{1+2u\lambda}},\ u \geq 0$$

On en déduit facilement la formule annoncée.□

Revenons maintenant au cas où $X = B$ est un mouvement brownien.

Proposition 6.
Si $K(s,t) = \inf(s,t)$ alors le problème intégral :

$$\int_0^1 K(s,t)\varphi(s)ds = \lambda\varphi(t),\ \forall t \in [0,1]$$

est équivalent au problème de Sturm-Liouville :

$$\lambda\varphi''(t) + \varphi(t) = 0,\ \forall t \in]0,1[$$

avec conditions au bord :

$$\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$$

Preuve. Si φ et λ sont solutions du problème intégral, alors on a, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\lambda\varphi(t) = \int_0^t s\varphi(s)ds + t\int_t^1 \varphi(s)ds$$

et $\lambda\varphi'' + \varphi = 0$ sur $]0,1[$. Pour trouver les conditions au bord, on écrit :

$$\lambda\varphi(t) = \int_0^1 K(s,t)\varphi(s)ds = -\lambda\int_0^1 K(s,t)\varphi''(s)ds$$

et on intègre par parties après avoir simplifié l'égalité par λ. La réciproque se fait de même.□

On en déduit la :

Proposition 7.
Les valeurs propres de l'opérateur intégral de noyau $K(s,t) = \inf(s,t)$ *sont :*

$$\lambda_j = \frac{4}{(2j+1)^2\pi^2},\ j \in \mathbb{N}$$

Preuve. On cherche les λ donnant une solution φ non identiquement nulle. De l'équation différentielle, on tire que φ est de la forme :

$$\varphi(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}t\right),\ t \in [0,1]$$

Des conditions au bord, on déduit que $A = 0$ puis que $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ est de la forme $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$.
Remarque. λ est nécessairement > 0 car l'opérateur est symétrique défini positif. Si cette propriété ne vous parait pas claire, vous devez distinguer les trois cas : $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$ et remarquer que seules les valeurs $\lambda = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} > 0$ donnent des solutions φ non identiquement nulles compatibles avec les conditions au bord.□

Finalement, on obtient le théorème 1 grâce aux propositions 5 et 7 et le :

Lemme 8 (développement eulérien du ch).
L'égalité :

$$\mathrm{ch} t = \prod_{n=0}^{+\infty}\left(1 + \frac{4t^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)$$

a lieu pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve. On suppose connu le développement eulérien du sinus :

$$\sin t = t\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right),\ t \in \mathbb{R}$$

(voir par exemple [2] page 260) ou encore (faire $t \longrightarrow it$) celui du sinus hyperbolique :

$$\operatorname{sh} t = t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right),\ t \in \mathbb{R}$$

On en tire, si $t \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sh}(2t) = 2t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{4t^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$= 2t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right) \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{4t^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)$$

$$= 2\operatorname{sh} t \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{4t^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)$$

Pour conclure, il reste à se souvenir de la relation $\operatorname{sh}(2t) = 2\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t$.$\square$

Références citées.

[**1**] Haim Brézis - Analyse fonctionnelle : théorie et applications - Dunod, 1999

[**2**] Xavier Gourdon - Les maths en tête : analyse - Ellipses, 1994